ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU MERCREDI 27 DÉCEMBRE 1944.

PRÉSIDENCE DE M. CHARLES MAURAIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **Alfred Lacroix** dépose sur le bureau de l'Académie une brochure intitulée *Vingtième anniversaire de la Mécanique ondulatoire*, Plaquette commémorative publiée sous les auspices du Comité Louis de Broglie.

M. le **Président** signale à l'Académie qu'à l'occasion du Nouvel An la prochaine séance hebdomadaire aura lieu le mercredi 3 janvier au lieu du lundi 1er.

M. **René Souèges** dépose une *Notice* sur la vie et les travaux de son prédécesseur, Henri Colin, qui sera imprimée dans le Recueil des *Notices et Discours*.

MAGNÉTOCHIMIE. — *Nouvelles précisions sur la systématique magnétochimique.* Note de MM. **Paul Pascal** et **Adolphe Pacault**.

Nous avons montré [1] que des mesures nouvelles faites sur des composés organiques permettent d'affirmer les règles de notre systématique magnétochimique, mais qu'elles nous mettent aussi dans l'obligation d'en préciser certains points, qui ont été mal interprétés. C'est le cas, en particulier, pour les cycles polyméthyléniques.

La cyclisation non aromatique provoque, comme l'un de nous l'a montré, une dépréciation diamagnétique variable avec le nombre n d'atomes de carbone du cycle. Il lui correspond des incréments

$\lambda . 10^6$..........	+3,4	+1,1	0	+3,1
pour n........	3	4	5	6

Farquharson et Sastri [1] ont calculé, indépendamment de toute systématique, ce qu'ils regardent comme la dépréciation diamagnétique due à la cyclisation en comparant les susceptibilités d'acides linéaires n-oïques et des acides cycliques $(n-1)$ méthylènecarboxyliques. Ils croient montrer ensuite que

(1) *Comptes rendus*, 219, 1944, p. 599.

leurs résultats ne confirment pas nos valeurs précédentes, mais ils ne définissent pas de la même manière que nous la dépréciation diamagnétique et n'introduisent pas la notion d'un incrément caractéristique constant.

En effet, nous appelons *dépréciation diamagnétique* λ la différence entre la susceptibilité mesurée et la susceptibilité calculée par notre systématique en tenant compte de toutes les particularités de structure. Farquharson et Sastri ([2]) définissent leur terme λ' comme la différence entre la susceptibilité de l'acide linéaire et celle de l'acide cyclique, à laquelle est ajoutée la susceptibilité des deux atomes d'hydrogène manquants. (Ils prennent d'ailleurs $K_H = -2{,}82.10^{-6}$, alors que nous prenons $K_H = -2{,}93.10^{-6}$). Mais, en procédant ainsi, ils ne tiennent pas compte du fait que la cyclisation fait apparaître, dans la plupart de leurs exemples, un carbone tertiaire en α d'une fonction oxygénée, accident structural qui introduit de façon constante un incrément diamagnétique $\lambda = -1{,}3.10^{-6}$. Si l'on tient compte de cette remarque, et en prenant $K_H = -2{,}93.10^{-6}$, au lieu de $-2{,}82.10^{-6}$ comme les auteurs, afin d'avoir des chiffres comparables, les incréments λ' de Farquharson et Sastri (F. S.) sont remplacés par des nombres λ'' généralement un peu plus grands. Le désaccord avec nos nombres est alors accru pour les dérivés triméthyléniques et tétraméthyléniques; il est supprimé pour les dérivés pentaméthyléniques. Dans le cas des cycles hexaméthyléniques enfin, il est bon de noter que Farquharson et Sastri ont étudié plus d'un cas particulier; les nouvelles valeurs sont alors assez divergentes entre elles et restent assez différentes des nôtres. On trouve en effet :

	$10^6 K_M$ mesuré (F. S.)	$10^6\lambda'$	$10^6\lambda''$	$10^6\lambda$ moyen
Acide caproïque	$-78{,}14$	$-0{,}98$	$+0{,}10$	0
» cyclopentanecarboxylique	$-73{,}48$			
» heptoïque	$-89{,}74$	$+0{,}86$	$+1{,}94$	3,1
» cyclohexanecarboxylique	$-83{,}24$			
Alcool hexylique	$-79{,}81$	$+0{,}87$	$+0{,}65$	$+3{,}1$
Cyclohexanol	$-73{,}30$ (—72,8 Pascal)			
Hexane	$-74{,}91$ (—76,4 Pascal)			
Cyclohexane	$-68{,}13$ (—68,2 Pascal)	$+1{,}14$	$+0{,}92$	$+3{,}1$

Et cependant notre incrément $+3{,}1.10^{-6}$, moyenne comme tous les autres de mesures nombreuses, paraît mieux convenir aux calculs des susceptibilités moléculaires, même dans les cas compliqués où s'accumulent les cycles saturés de 6 atomes de carbone. C'est le cas par exemple pour les corps suivants :

Cholestérol $C^{27}H^{45}OH$	$-285{,}0$	$-287{,}0$
Acide déhydrocholique $C^{24}H^{34}O^{5}$	$-235{,}6$	$-237{,}1$

([2]) *Trans. Faraday Soc.*, 33, 1937, p. 1473.

A ce sujet on notera encore en passant que l'accumulation des causes d'insaturation finit par ne plus avoir d'effet sur le diamagnétisme moléculaire : témoin le terme correctif relatif aux cyclohexadiéniques $\lambda = +10,7.10^{-6}$, pratiquement égal à celui qui correspond à deux liaisons éthyléniques.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Réglementation et extension de la réaction de Jürgens, pour l'aconitine.* Note de M. **Georges Denigès.**

I. L'identification, par voie chimique, de l'aconitine est unanimement considérée comme une opération des plus délicates et l'on ne connaît guère, pour y arriver, que le procédé d'ordre micro-cristallin de Jürgens, consistant dans la formation d'iodhydrate de cet alcaloïde, se présentant en lamelles clinorhombiques incolores, par l'action de l'iodure de potassium en milieu hydro-acétique.

Bien que figurant dans la plupart des Traités de Toxicologie, ce procédé n'a pas donné, entre toutes les mains, les résulats escomptés. Il est, en tout cas, qualifié de peu sensible et d'une réalisation difficile; ce sont les termes de la *Chimie Toxicologique* d'Ogier et Kohn Abrest, et les auteurs ne s'accordent même pas toujours sur l'aspect des lamelles typiques, que Fonzes-Diacon, dans son *Précis de Toxicologie*, déclare de couleur orangée, ce qui est d'ailleurs inexact, ainsi que nous le verrons plus loin.

En examinant de près les conditions de formation de ces cristaux, je me suis bien vite aperçu que ces critiques et discordances provenaient de l'imprécision de la technique indiquée par l'auteur, surtout en ce qui concerne le titre de son réactif hydro-acétique.

Je me suis convaincu que la réussite constante de la réaction de Jürgens exigeait que le titre de la solution d'aconitine essayée fût au moins de 1, ou mieux encore de 2 %, et que celui de la dilution acétique fût compris entre 5 et 10 % d'acide pur (avec un optimum pour cette dernière valeur). Quand ce titre atteint ou dépasse 20 %, une certaine quantité d'iode, libérée de l'iodure, se fixe sur les lamelles cristallines et les colore en jaune (cas de Fonzes-Diacon).

Enfin il est nécessaire que la concentration des ions iodés, dans le milieu où se pratique l'essai, soit aussi grande que possible.

Ces trois points étant observés, rien n'est plus facile que d'obtenir des cristaux d'iodhydrate d'aconitine.

On s'en assurera en préparant, comme point de départ, une solution de $0^{g},20$ d'azotate d'aconitine cristallisé dans un mélange de 9^{cm^3} d'eau et de 1^{cm^3} d'acide acétique cristallisable.

En possession de ce liquide on peut opérer soit avec une solution de IK à 90 %, soit avec le même sel solide, en nature.

Dans les deux cas, avec une baguette de verre à extrémité arrondie par

fusion et d'à peu près 5^{mm} de diamètre, trempée, sur une longueur de 1^{cm} environ, dans la solution alcaloïdique, on dépose, par simple contact, 1 goutte de ce liquide sur une lame porte-objet.

A partir de ce moment, ou bien, prélevée dans les mêmes conditions que précédemment, on porte sur cette première goutte 1 goutte de solution de IK à 90 %, ou bien on dépose à son centre un petit cristal de IK de 3 à 4^{mg}.

Après une minute au moins de contact, et sans couvrir la préparation d'une lamelle, on l'examine au microscope, à un grossissement de 130 à 200 D.

On aperçoit alors, en divers points, de nombreuses lamelles cristallines, incolores, formées pour la plupart d'octaèdres surbaissés à axes peu visibles.

Quand on opère avec un cristal d'iodure, il se crée bientôt, à son pourtour, une zone très concentrée d'ions iodés favorisant, de leur côté, la formation des lamelles d'iodhydrate.

Comme, d'une part, la concentration du nitrate d'aconitine peut être abaissée à 1 % (ce qui correspond à 0,8 % de base libre), sans cesser de fournir une réaction certaine et que, d'autre part, chaque gouttelette, prélevée comme il a été prescrit ne représente, le plus souvent, qu'un dixième de goutte normale (soit 200 gouttes au centimètre cube), on se rend compte que la quantité d'alcaloïde susceptible d'être décelée dans cet essai est de $0^{mg},04$, pouvant être réduite à $0^{mg},02$ si l'on utilise l'iodure solide plutôt qu'en solution, car alors il n'apporte plus de dilution sensible dans l'ensemble de la préparation.

S'il s'agit de l'identification de l'alcaloïde à l'état solide, on l'additionne soit d'une gouttelette d'acide acétique au dixième, puis d'un cristal de IK, soit d'une gouttelette de solution à 90 % de IK, acidulée du dixième de son volume du même acide cristallisable.

Ainsi procédera-t-on avec un résidu soupçonné aconitique provenant d'un produit d'extraction, convenablement purifié, en toxicologie.

Ces préparations se conservent longtemps; lorsque, spontanément ou artificiellement, elles se sont suffisamment évaporées, il arrive qu'à côté des lamelles typiques, des cristaux de IK se déposent. Une gouttelette d'eau, dispersée sur l'ensemble, dissout ces derniers en respectant l'iodhydrate d'aconitine

II. J'ai pensé que les autres halogénures alcalins fourniraient peut-être, avec l'aconitine, des résultats semblables à ceux que donnent les iodures. En effet en employant soit une solution très concentrée (BrK à 50 % ; ClNa à 30 %) soit un cristal de ces sels, on constate qu'il en est bien ainsi, à condition d'observer fidèlement la technique fixée plus haut avec IK, et les bromhydrate et chlorhydrate (ce dernier un peu plus long à apparaître) d'aconitine présentent le même aspect que l'iodhydrate correspondant.

L'analogie est même telle qu'avec l'ion triazote, dont les rapports avec les ions halogènes sont si nombreux, j'ai pu établir un nouveau rapprochement avec les chloroïdes vis-à-vis de l'aconitine. Effectivement, en projetant quelques

parcelles d'azoture de sodium pur dans une gouttelette de solution hydro-acétique d'aconitine à 2 %, j'ai obtenu, très rapidement, des lamelles clino-rhombiques d'azothydrate de cet alcaloïde.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

André Guillaumin. *Introduction à la Flore de la Nouvelle-Calédonie*. Extrait des *Annales du Musée colonial de Marseille*, I, 1943 (présenté par M. A. Chevalier).

M. **Jean Loiseleur** adresse un Rapport relatif à l'emploi qu'il a fait de la subvention qui lui a été attribuée sur la *Fondation Loutreuil* en 1943.

Mmes **Pierre Allorge, Roger Heim**; Mlles **Lucienne Beauquesne, Thérèse Pobeguin**; MM. **Georges Allard, Paul Baize, Jacques Bénard, Pierre Birot, Henri Cartan, Marius Chadefaud, Henri Charpentier, Édouard Chatton, Lucien Chopard, André Chrétien, Henri Chrétien, Louis Couffignal, Pierre Crété, Georges Curasson, Albert Dalcq, Georges Darrieus, Jean Delsarte, Jean-Louis Destouches, Jean Didiée, Jean Dieudonné, Robert Ph. Dollfus, Paul Dubreil, Georges Dupont, Gabriel Foëx, Maurice Fontaine, André Fribourg-Blanc, Raymond Furon, Louis Gallien, Christophe Gaudefroy, Lucien de Gennes, Pierre Grabar, Louis Lafont, René Legendre, André Le Grand, Henri de Leiris, Albert Leulier, André Léveillé, Pierre Limasset, Joseph Magrou, Roger Meslin, Fernand Moreau, André Paillot, Léon Pales, René Paris, Aimé Perpillou, Jacques Rateau, André Rochon-Duvigneaud, Jean Rösch, Louis Royer, Guillaume Rumeau, Paul Sédallian, Roger Servant, Sébastien Turchini** adressent des remercîments pour les distinctions accordées à leurs travaux.

Mme Vve **Ferdinand Gidon** adresse des remercîments pour la distinction accordée aux travaux de son mari.

Mlle **Jacqueline Ferrand** adresse également des remercîments.

MM. **Paul Bonét-Maury, Pierre Bonnet, Abel Brion, Chin-Kuo-Chun, Jean Coulomb, Jean Cournot**, le **Directeur de l'École nationale vétérinaire de Lyon**, le **Général commandant l'École polytechnique, Édouard Fischer, Raymond Jacquet, Louis Salomon**, le **Secrétaire général et le Président de la Société de Pathologie comparée** adressent des remercîments pour les subventions qui leur ont été attribuées pour leurs recherches ou leurs Bibliothèques.

M. **Conrad Kilian** prie l'Académie de bien vouloir le compter au nombre des candidats à l'une des places vacantes dans la Section de Minéralogie.

M. **René Leriche** prie l'Académie de bien vouloir le compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Section de Médecine et Chirurgie par la mort de M. *Antonin Gosset.*

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Sur une généralisation des domaines d'épaisseur constante.* Note de M. **Eugène Blanc**, présentée par M. Paul Montel.

J'ai défini ([1]) l'adjoint-R d'un ensemble plan E comme l'ensemble des points communs aux cercles fermés de rayon R centrés sur E et j'ai montré que E et son adjoint sont réciproques dans le cas où E est surconvexe-R et seulement dans ce cas. Il existe alors entre les frontières (que l'on dira aussi adjointes l'une de l'autre) de ces ensembles une correspondance qui, à chaque point non anguleux de l'une, fait correspondre un point unique de l'autre, tandis qu'à un point anguleux de l'une correspond un arc de cercle de l'autre; à toute droite d'appui de l'un des ensembles correspond pour l'autre une droite d'appui parallèle passant par l'un des points correspondants, ces deux droites étant distantes de R.

Cette correspondance a donc exactement les mêmes caractères que celle qui relie les points et les droites d'appui opposés d'un même orbiforme d'épaisseur R. D'autres propriétés des orbiformes se trouvent généralisées par le couple d'ensembles R-*complémentaires* ainsi défini.

I. Si l'on considère les fonctions d'appui $H_1(\varphi)$ et $H_2(\varphi)$ de ces deux ensembles, on a

$$H_1(\varphi)+H_2(\varphi+\pi)=R,$$

d'où résulte que :

1° *La somme des longueurs des deux frontières est égale à* $2\pi R$.

2° *La somme des longueurs de deux arcs correspondants est égale à* αR, *en désignant par* α *la déflexion commune de ces deux arcs, c'est-à-dire l'angle des droites d'appui extrêmes.* (Ce résultat reste d'ailleurs valable même si l'un ou l'autre des arcs contient des points anguleux ou se réduit à un tel point.)

3° *Si l'une des frontières possède un rayon de courbure en un point, l'autre possède un rayon de courbure au point correspondant et la somme de ces deux rayons est constamment égale à* R (en un point anguleux le rayon de courbure doit être considéré comme nul).

II. *Si l'on fait, au sens de la théorie des figures convexes, la somme des deux ensembles considérés, on obtient un ensemble d'épaisseur constante* $2R$.

En effet, la fonction d'appui de la somme est $H(\varphi)=H_1(\varphi)+H_2(\varphi)$, et l'on a

$$H(\varphi)+H(\varphi+\pi)=H_1(\varphi)+H_2(\varphi+\pi)+H_1(\varphi+\pi)+H_2(\varphi+2\pi)=2R.$$

([1]) *Ann. Ec. Norm.*, 3e série, 60, 1943, pp. 215-246.

Si l'on ajoute à l'un des ensembles le symétrique de l'autre par rapport à l'origine, on obtient comme fonction d'appui

$$H'(\varphi) = H_1(\varphi) + H_2(\varphi + \pi) = R;$$

la somme est un cercle de centre O *et de rayon* R.

Cette dernière construction généralise sur deux ensembles celle du domaine vectoriel d'un ensemble convexe; le domaine vectoriel est en effet la somme de l'ensemble et de son symétrique par rapport à l'origine. On sait que le domaine vectoriel d'un orbiforme de largeur R est un cercle de rayon R.

Nous avons donné à deux ensembles le nom d'*ensembles* R-*complémentaires* lorsqu'ils sont dans la relation définie plus haut. Ce qui précède montre clairement les raisons de cette dénomination.

III. Il résulte immédiatement des définitions que :

Tout orbiforme d'épaisseur R *coïncide avec son* R-*complément et tout ensemble qui coïncide avec son* R-*complément est un orbiforme d'épaisseur* R.

Une propriété qui revient à celle-ci a été admise implicitement par certains auteurs (²), qui en ont déduit la formation d'un orbiforme à partir d'un arc dont la déflexion est égale à π, la distance entre les extrémités égale à R et dont le rayon de courbure ne dépasse pas R. A cette construction correspond la possibilité de former un couple de R-compléments à partir d'un ensemble *scv*R quelconque pris comme l'un des éléments.

Il y a là, nous semble-t-il, pour la technique une possibilité intéressante : celle de pouvoir construire des cames à double guidage tangentiel ne permettant ni jeu, ni retard dans le mouvement des organes commandés et pour lesquelles la loi du mouvement puisse être donnée arbitrairement (dans la limite des conditions de courbure imposées aux *scv*R) pour toute la durée d'un tour complet. Les orbiformes en effet donnent la possibilité d'un tel guidage, mais la loi ne peut être imposée arbitrairement (sous les mêmes réserves) que pendant un demi-tour, la forme de l'orbiforme étant entièrement définie dès que l'on en connaît la moitié.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la composition de seconde espèce et les fonctions de Schmidt.* Note de M. **André Lichnerowicz**, présentée par M. Élie Cartan.

Sur l'intervalle (a, b) les noyaux considérés dans cette Note sont bornés et sommables par rapport à chacune des variables ainsi que leurs carrés. Pour simplifier l'exposé, nous supposerons de plus que les noyaux, fonctions de variables réelles, sont eux-mêmes à valeurs réelles. Mais tous les résultats s'étendent immédiatement au cas où les noyaux sont à valeurs complexes.

(²) Voir par exemple H. Bückner, *Jahr. Deut. Mat. Ver.*, 46, 1936, pp. 115 et suiv.

A une valeur de Schmidt λ_i d'un noyau K correspondent deux fonctions de Schmidt φ_i et ψ_i à gauche et à droite; il nous est commode d'introduire, pour désigner le noyau K, le symbole $K[\varphi_i, \psi_i, \lambda_i]$.

1. *Décomposition canonique.* — Étant donnés deux noyaux $H[\varphi_i, \psi_i, \alpha_i]$ et $K[\psi_i, \chi_i, \beta_i]$, on appelle *produit de composition de ces deux noyaux* le noyau

$$L(x, y) = \int_a^b H(x, s) K(s, y)\, ds.$$

Inversement le noyau L est dit admettre une *décomposition canonique*. Le noyau L admet évidemment, parmi ses fonctions de Schmidt à gauche, les fonctions φ_i, et, parmi ses fonctions de Schmidt à droite, les fonctions χ_i, les valeurs de Schmidt correspondantes étant $\lambda_i = \alpha_i \beta_i$. D'après le théorème de Hilbert-Schmidt appliqué aux noyaux H et K, le noyau L est développable en la série absolument et uniformément convergente par rapport à chacune des variables sur (a, b)

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\varphi_i(x)\chi_i(y)}{\lambda_i}. \tag{1}$$

Il en résulte que *le noyau* L *n'admet pas d'autres couples de fonctions de Schmidt que les couples* (φ_i, χ_i). Supposons que les noyaux H et K considérés soient des noyaux de Fredholm. D'après le lemme de Dini, les séries

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\alpha_i^2}, \qquad \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\chi_i^2(x)}{\beta_i^2}$$

convergent uniformément par rapport à x. Il en résulte que *le développement* (1) *converge uniformément par rapport à l'ensemble des variables x et y*. Ces résultats s'étendent immédiatement au cas où le noyau H a un nombre fini de fonctions de Schmidt à droite distinctes des fonctions de Schmidt à gauche de K. On définit aisément d'une manière analogue la décomposition canonique d'un noyau en un nombre fini de noyaux.

2. *Décomposition canonique d'un noyau donné, l'un des facteurs étant connu.* — Étant donnés deux noyaux $L[\varphi_i, \chi_i, \lambda_i]$ et $H[\varphi_i, \psi_i, \alpha_i]$, on peut chercher s'il existe des noyaux correspondants $K[\psi_i, \chi_i, \beta_i = \lambda_i/\alpha_i]$. Pour qu'il existe un noyau K tel que

$$L(x, y) = \int_a^b H(x, s) K(s, y)\, ds,$$

il faut et il suffit que la série

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_i^2 \frac{\chi_i^2(y)}{\lambda_i^2} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\chi_i^2(y)}{\beta_i^2}$$

soit convergente. S'il en est ainsi, on peut choisir le noyau K de façon à

admettre comme seules fonctions de Schmidt les couples (ψ_i, χ_i). A cet effet il suffit de prendre K tel que

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\psi_i(x)\chi_i(y)}{\beta_i} \right]^2 dx = 0.$$

3. *Noyaux premiers et non premiers.* — Nous dirons qu'un noyau est *premier* s'il n'admet pas de décomposition canonique en un produit de deux noyaux; nous dirons qu'il est *non premier* dans le cas contraire. *Pour qu'un noyau* L *soit premier, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de couples de nombres* (α_i, β_i) *tels que*

$$\alpha_i \beta_i = \lambda_i$$

et que les deux séries

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\alpha_i^2}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\chi_i^2(x)}{\beta_i^2} \tag{3}$$

soient convergentes. Il est clair en effet que, si un noyau est non premier, il existe bien des couples (α_i, β_i) satisfaisant aux conditions énoncées. Inversement, s'il existe de tels couples, la série (2) étant convergente, il existe un noyau symétrique $S[\varphi_i, \varphi_i, \alpha_i]$; la série (3) étant convergente, il existe un noyau $K[\varphi_i, \chi_i, \beta_i]$ tel que

$$L(x, y) = \int_a^b S(x, s) K(s, y)\, ds.$$

Le raisonnement montre de plus que *tout noyau non premier admet une décomposition canonique en un produit de deux noyaux dont l'un peut être choisi symétrique.* En dehors de la condition suggérée par la partie (1), il est facile de trouver des conditions suffisantes simples pour qu'un noyau L soit premier. Si les séries (2) et (3) convergent, il en est en effet de même des séries

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{|\lambda_i|} \operatorname*{Min}_{x \in (a, b)} \left(\frac{\chi_i^2}{\varphi_i^2} \right), \qquad \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\chi_i^2(x)}{|\lambda_i|} \operatorname*{Min}_{x \in (a, b)} \left(\frac{\varphi_i^2}{\chi_i^2} \right),$$

dont les termes ne dépendent que du noyau L considéré. On en déduit que si L est non premier, les valeurs de Schmidt des noyaux facteurs peuvent être astreintes aux inégalités

$$|\lambda_i| \operatorname{Min} \left(\frac{\varphi_i^2}{\chi_i^2} \right) < \alpha_i^2 < |\lambda_i| \operatorname{Max} \left(\frac{\varphi_i^2}{\chi_i^2} \right),$$

$$|\lambda_i| \operatorname{Min} \left(\frac{\chi_i^2}{\varphi_i^2} \right) < \beta_i^2 < |\lambda_i| \operatorname{Max} \left(\frac{\chi_i^2}{\varphi_i^2} \right).$$

4. *Cas d'un noyau symétrique.* — Pour qu'un noyau symétrique soit non

premier, il faut et il suffit que la série associée

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}$$

converge absolument, la réciproque résultant immédiatement de la convergence de la série $\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{|\lambda_i|}$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une classe de développements en série.* Note [1] de M. **Yves Martin**, présentée par M. Paul Montel.

Les fonctions $\varphi(z, n)$ étant entières et satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad m < \left| \frac{\varphi(z, n)}{z^n} \right| < M \quad \text{pour } r \leqq |z| \leqq R \text{ et } n > N(r, R),$$

nous nous proposons d'étudier l'ensemble des points de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$ et sa croissance lorsque cet ensemble est constitué par tous les points du plan sauf le point à l'infini.

Nous avons déjà vu [2] que ces séries convergent uniformément et absolument pour $|z| \leqq \rho' < \rho$ avec $1/\rho = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ une série entière de rayon de convergence ρ positif. Si $f(z)$ est représentable par une série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$ de rayon de convergence non nul, cette série et la série entière convergent ou divergent simultanément. Pour démontrer ce résultat, on s'appuie sur le fait que si $\sqrt[n]{|c_n|}$ a une limite supérieure finie, cette limite supérieure est égale à $1/\rho$, et que $|a_n \rho^n|$ est de l'ordre de $|c_n \rho^n|$ et l'on utilise les inégalités que vérifient les coefficients du développement en série entière de $\varphi(z, n)$ [2]. Il n'est donc pas possible de trouver une suite particulière de fonctions $\varphi(z, n)$ telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$ représente mieux $f(z)$ que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Quand les séries $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$ ont un rayon de convergence fini non nul, elles se comportent très sensiblement comme des séries entières [2]. Mais

---

(1) Séance du 13 décembre 1944.

(2) *Comptes rendus*, 219, 1944, p. 383.

si ces séries ont un rayon de convergence infini, on ne peut plus, en général, leur étendre les propriétés des séries entières relatives à la croissance.

D'après ce qui précède, si l'on prend pour $f(z)$ la fonction identiquement nulle et s'il existe une suite c_n satisfaisant au système

$$(2) \qquad \sum_{n=p}^{\infty} c_p \alpha_{n-p}^{p} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots) \quad \text{avec } \varphi(z, n) = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{q-n}^{n} z^q,$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$ a un rayon de convergence nul ou infini. Les deux cas peuvent effectivement se produire. Cependant, si les fonctions $\varphi(z, n)/z^n$ sont entières et non nulles pour $z = 0$, le système (2) permet de calculer les c_n par récurrence et la représentation d'une fonction quelconque $f(z)$ est unique. On peut alors vérifier directement que $\sqrt[n]{|c_n|}$ a bien une limite supérieure égale à $1/\rho$. D'autre part, si $\varphi(z, n)$ est un polynome de degré n, le système (2) peut admettre des solutions non identiquement nulles mais les séries ainsi trouvées ont un rayon de convergence nul, si bien que la représentation de $f(z)$ par des séries $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$, si elle existe, est encore unique. On ne peut pas espérer améliorer ce dernier résultat, car il est facile de construire des polynomes $\varphi(z, n)$ de degré $n+1$ et tels que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$ soit identiquement nul, la série étant convergente pour tout z. On pourra prendre

$$\varphi(z, 0) = 1 + \frac{3z}{4}; \quad \varphi(z, n) = \frac{z^{n-1}}{n} + z^n + z^{n+1} \frac{n+3}{(n+2)^2} \quad \text{pour } n \neq 0 \quad \text{et} \quad c_n = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

En conservant les mêmes fonctions $\varphi(z, n)$ et en prenant $\gamma_n = 1/n!$, on obtient la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi(z, n) = 2e^z.$$

Par cet exemple on voit que l'ordre de la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$ n'est plus en général déterminé par la donnée des $|c_n|$. Une modification de l'argument d'un nombre fini ou infini de c_n pourra entraîner un changement de l'ordre de la fonction $f(z)$.

Cependant, si les fonctions $\varphi(z, n)$ sont des polynomes de degré inférieur à kn, l'orde de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$ est au plus égal à l'ordre de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ multiplié par k. Et, si $\varphi(z, n)$ est un polynome de degré n au plus, donc effectivement de degré n pour n supérieur à n_0, l'ordre et le type de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$ sont égaux respecti-

vement à ceux de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Dans ce cas particulier l'ordre et le type de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi(z, n)$ sont donc entièrement déterminés par la donnée des $|c_n|$, quelle que soit la suite des polynomes $\varphi(z, n)$, de degré n au plus, satisfaisant à la condition (1).

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Polynomes trigonométriques orthogonaux relatifs à une ellipse de foyers* $(-1, +1)$ (¹). Note (²) de M. **Noubar Arpiarian**, présentée par M. Paul Montel.

Théorème. — *Les polynomes* $T_n(z) = (\cos n \arc\cos z)/2^{n-1} = z^n + \ldots$ *réalisent le minimum des intégrales*

$$I_n = \int_C f[|P_n(z)|] \frac{ds}{|\sqrt{z^2-1}|}, \qquad J_n = \iint_D f[|P_n(z)|] \frac{d\omega}{|z^2-1|}$$

parmi tous les polynomes de la forme $P_n(z) = z^n + \ldots$, $f(x)$ *étant une fonction réelle convexe et non décroissante quelconque*, C *l'ellipse et* D *le domaine intérieur.*

Nous avons là une double généralisation d'un résultat obtenu pour les variables réelles par M. S. Bernstein (³).

Les polynomes $T_n(z)$ *sont orthogonaux par rapport à l'ellipse, avec le poids* $1/|\sqrt{1-z^2}|$ *au sens linéaire et le poids* $1/|1-z^2|$ *au sens superficiel.*

Les polynomes $(1/2^n)[\sin(n+1) \arc\cos z]/(\sin \arc\cos z) = z^n + \ldots$ *sont orthogonaux de poids* $|\sqrt{1-z^2}|$ *au sens linéaire, et de poids* $|1-z^2|$ *au sens superficiel.*

Les polynomes $(1/2^n)[\sin(n+1/2) \arc\cos z]/(\sin 1/2 \arc\cos z) = z^n + \ldots$ *sont orthogonaux de poids* $|\sqrt{(1-z)/(1+z)}|$ *au sens linéaire, et de poids* $|(1-z)/(1+z)|$ *au sens superficiel.*

Les polynomes $(1/2^n)[\cos(n+1/2) \arc\cos z]/(\cos 1/2 \arc\cos z) = z^n + \ldots$ *sont orthogonaux de poids* $|\sqrt{(1+z)/(1-z)}|$ *au sens linéaire, et de poids* $|(1+z)/(1-z)|$ *au sens superficiel.*

Ces polynomes sont les mêmes pour toutes les ellipses homofocales $(-1, +1)$. Seule la norme dépend de l'ellipse. Les poids superficiels sont les carrés des poids linéaires.

Polynomes normés. — D'après la définition habituelle, les polynomes $Q_n(z)$ orthogonaux sont aussi normés lorsque

$$\frac{1}{l} \int_C |Q_n(z)|^2 \varpi(z)\, ds = 1,$$

l désignant la longueur de la courbe C.

(¹) Voir, pour les notations, une Note précédente (*Comptes rendus*, **219**, 1944, p. 587).

(²) Séance du 13 décembre 1944.

(³) *Journal de Math.*, 9ᵉ série, **10**, 1931, p. 219-286.

Nous proposons dans notre Note précédente les conditions

$$\frac{1}{M}\int_C |Q_n(z)|^2\varpi(z)\,ds = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\mathfrak{M}}\iint_D |Q_n(z)|^2\varpi(z)\,d\omega = 1,$$

M étant la masse de la courbe C affectée de la densité linéaire $\varpi(z)$, et $\mathfrak{M}$ la masse de la surface D affectée de la densité superficielle $\varpi(z)$. De tels polynomes peuvent être appelés *orthonormés* au sens linéaire ou superficiel. Il suffit, pour normer les fonctions d'une suite orthogonale, de les diviser par la racine carrée de la norme.

Avec cette définition, nous obtiendrons des expressions simples de la norme des polynomes précédents en introduisant le rayon R de la circonférence d'où provient l'ellipse par la transformation conforme

$$z = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right).$$

La masse de toutes les ellipses avec la densité linéaire $1/|\sqrt{1-z^2}|$ est $M = 2\pi$, et la norme des $T_n(z)$ est $N_n = (1/2^{2n})[R^{2n} + (1/R^{2n})]$.

La masse de l'ellipse avec la densité linéaire $|\sqrt{1-z^2}|$ est

$$M = \frac{\pi}{2}\left(R^2 + \frac{1}{R^2}\right),$$

et la norme des seconds polynomes est

$$N_n = \frac{1}{2^{2n}}\,\frac{R^{2n+2} - \dfrac{1}{R^{2n+2}}}{R^2 - \dfrac{1}{R^2}}.$$

Pour les deux derniers polynomes, la masse M_E est la même et s'exprime par des intégrales elliptiques; la norme commune est

$$N_n = \frac{\pi}{2^{2n}M_E}\left(R^{2n-1} + \frac{1}{R^{2n-1}}\right).$$

La masse de l'ellipse avec la densité superficielle $1/|1-z^2|$, est $\mathfrak{M}_E = 2\pi\log R$ et la norme des $T_n(z)$ est ici

$$\mathfrak{N}_n = \frac{1}{2^{2n}}\,\frac{1}{2n\log R}\left(R^{2n} - \frac{1}{R^{2n}}\right).$$

Les normes superficielles des autres polynomes se calculent de même sans intégrales elliptiques, mais ne présentent pas d'expressions remarquables.

MÉCANIQUE PHYSIQUE. — *Sur la détermination cinématique de la dureté à l'aide d'un cône.* Note de MM. **Pierre Dubois** et **André Dumez**.

De nombreuses recherches ont été faites sur la dureté, comme en témoignent les 400 Mémoires qui sont cités dans l'Ouvrage de O'Neill (1).

---

(1) *The hardness of metals and its measurement*, London, 1934.

Au cours d'un long travail, nous avons obtenu les résultats les plus simples en réalisant l'empreinte à l'aide d'un cône. Voici un résumé de l'étude faite avec ce pénétrateur, étude qui fera prochainement l'objet d'un Mémoire détaillé.

Principe de la méthode. — Nous avons adapté à une machine Chevenard à enregistrement graphique [2] différents dispositifs permettant l'enregistrement de la courbe : force-pénétration, dans les conditions variées nécessitées par nos recherches.

Étude des courbes obtenues. — Plus de 300 courbes, relatives à des corps simples ou composés et à des matériaux p divers, sont des paraboles pour lesquelles la force F est liée à la pénétration (généralement de l'ordre du millimètre) par la relation $F = Kp^2$. La constante K a été déterminée, pour chaque courbe, en utilisant la méthode des moindres carrés ou, le plus souvent, la méthode de Cauchy.

Influence du temps sur la valeur de K. — Alors que la durée habituelle de chaque expérience est de 1 minute, nous avons opéré à des vitesses constantes dans chaque cas, mais différentes de l'un à l'autre, cette durée ayant varié de 0,5 à 25 minutes. Entre ces limites, il ne semble pas, aux erreurs d'expériences près, qui n'excèdent pas ± 2 % par rapport à la moyenne, que le temps ait une influence sur le résultat.

Influence de l'angle du cône. — Nous avons utilisé des cônes en carbure de tungstène ayant des angles au sommet très différents. Quelques exemples des courbes qui traduisent les résultats obtenus sont donnés dans la figure 1.

Interprétation des résultats. — Le coefficient K, qui a les dimensions d'une pression, est une caractéristique du solide. Toutefois, comme cette pression n'est pas statique, nous avons préféré la définition suivante de la propriété étudiée. *La dureté est le travail nécessaire au refoulement à vitesse constante de l'unité de volume d'un solide à l'aide d'un pénétrateur donné.* Comme la détermination découle de l'enregistrement fait pendant l'expérience, nous avons appelé *dureté cinématique* le nombre qui traduit l'évaluation de ce travail. La même désignation nous semble convenir à la dureté calculée d'après la durée de choc [3] ou les oscillations d'un pendule [4].

Un calcul simple donne, dans le cas d'un cône d'angle au sommet α, pour la valeur de ce travail $T = K/\pi \operatorname{tg}^2 \alpha/2$. On arriverait à la même formule en partant de l'expression qui définit la dureté Meyer $\Delta_m = F/S$, où F est la force ayant servi à produire une empreinte dont le cercle à la surface du solide a une aire S.

Les courbes de la figure 2 montrent quelques exemples de la variation de ce

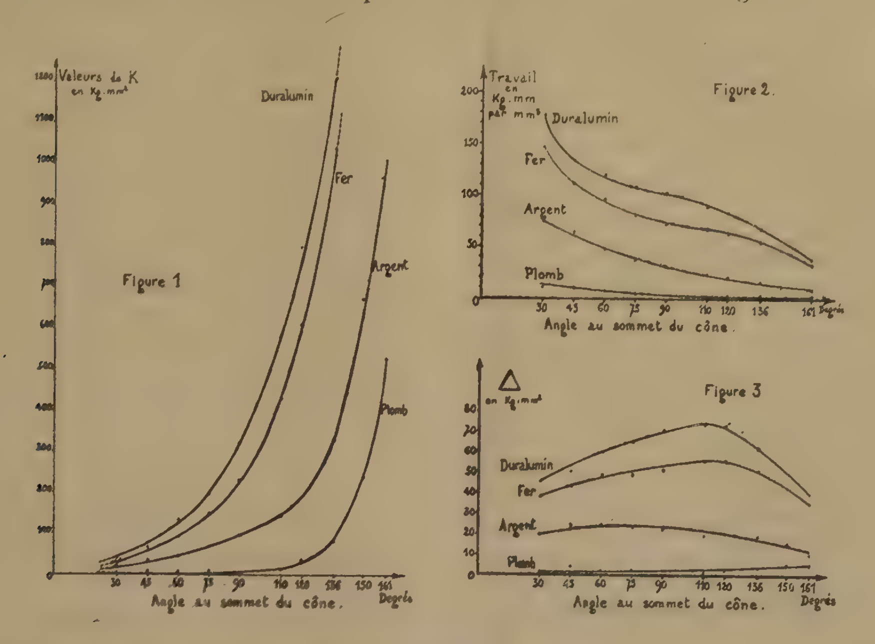
---

(2) *Revue de métallurgie*, 33, n° 4, 1936, p. 280.

(3) G. Moreau, *Ann. de phys.*, 14, 1920, p. 306.

(4) Le Rolland, *Revue de métallurgie*, 23 Mémoires, 1936, p. 567.

travail T, exprimé en kgmm/mm³, en fonction de l'angle au sommet de chacun des cônes utilisés. A titre de comparaison les courbes de la figure 3 traduisent



aussi, en fonction de ces différents angles, l'évolution de la dureté cinématique calculée d'après la relation $\Delta = F/S$, où F est la force en kilogrammes ayant produit, sous cette charge, une empreinte de surface latérale S/mm². C'est la relation habituellement employée pour calculer la dureté statique après la suppression de la charge sur le pénétrateur conique (Ludwik) ou sur la bille (Brinell).

Valeurs numériques. — Voici quelques valeurs de la dureté cinématique déterminées avec un cône d'angle au sommet égal à 90°. Les nombres entre parenthèses sont les duretés Brinell (charge de 500^{kg}, bille de 10^{mm} de diamètre) relatives à quelques mesures dans lesquelles le facteur temps a une influence assez faible.

Corps simples et alliages.				*Sels fondus et matériaux divers.*	
Aluminium..	22	Magnésium.	25	Carbonate de sodium.	112
Antimoine ..	68 (72)	Nickel.....	90 (96)	Nitrate de sodium....	33
Argent......	32	Plomb.....	2,7	Chlorure de potassium.	10,5
Bismuth	9,6	Zinc......	34	Gypse (fer de lance)..	34
Cuivre......	81 (87)	Acier......	175 (490)	Caoutchouc.......... (Dureté Shore 10)	0,36
Étain.......	8,0	Duralumin.	103 (114)	Bakélite (P_{21}).......	48
Fer.........	74 (80)	Laiton.....	107 (125)	Buis................	6,2

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Les caractéristiques, selon Cauchy, des équations d'évolution des particules à spin et l'équation relativiste de Jacobi.* Note de M. **Edmond Arnous**.

La recherche des caractéristiques des équations d'évolution des particules à spin conduit à une équation aux dérivées partielles, qui n'est autre que l'équation de Jacobi de la relativité restreinte.

Cette remarque a été faite par G. Racah (1) au sujet des équations de Dirac. Nous l'étendrons aux équations du photon. De là on passe sans peine au cas général. A vrai dire Racah obtient l'équation de Jacobi privée de termes en eA_i/c et m_0c (2). Si l'on désire conserver ces termes, il suffit de considérer une fonction d'onde évoluant dans l'espace à cinq dimensions, en introduisant, comme on l'a souvent fait, outre les variables d'Univers $x_1, \ldots, x_4 =$ const., une cinquième variable x_5, à laquelle on fait jouer le rôle du temps. En remplaçant alors devant eA_i/c et m_0c le facteur $2\pi i/h$ par $-\partial/\partial x_5$, on obtient des équations (non quantiques), qui s'identifient avec les équations de Dirac lorsqu'on se borne aux solutions de la forme $\psi(x_1, \ldots, x_4)\exp. -2\pi i x_5/h$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - \frac{eA_4}{c}\frac{\partial}{\partial x_5}\right)\Psi_j = \left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{eA_i}{c}\right)\alpha_i - m_0 c \frac{\partial}{\partial x_5}\alpha_4\right]\Psi;$$

où les α sont les matrices de Dirac.

Appliquons le même procédé aux équations du photon

$$\frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial x_4} = \left[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{a_i^{(1)} + a_i^{(2)}}{2} - \mu_0 c \frac{\partial}{\partial x_5}\frac{a_4^{(1)} + a_4^{(2)}}{2}\right]\Psi_{kl}.$$

Les a désignant les matrices bien connues. Développons et formons le déterminant caractéristique (3). On voit sans peine que cela revient à former la matrice à seize lignes et seize colonnes (4)

$$\Delta = \left\| -\frac{\partial S}{\partial x_4}E + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{a_i^{(1)} + a_i^{(2)}}{2} + \mu_0 c \frac{a_4^{(1)} + a_4^{(2)}}{2}\right\|$$

(1) *Atti dei Lincei*, (6), **13**, 1931, p. 424.

(2) Les A_i sont les composantes covariantes du potentiel d'Univers.

(3) La surface $S(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n$ est caractéristique pour le système

$$\sum_{ij}\lambda_{kj}^{i}\frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} + \mu_k = 0$$

si le déterminant de terme général $(k, j) = \sum_{i}^{n-1}\lambda_{kj}^{i}\partial S/\partial x_i - \lambda_{kj}^{n}$ est nul.

(4) E désigne la matrice unité à seize lignes et seize colonnes.

ou, en explicitant, et, pour plus de clarté, en groupant les termes en matrices partielles (à quatre lignes et quatre colonnes) (*),

$$\Delta = \begin{Vmatrix} \Delta_1 & 0 & \theta_2 E & \theta_1 E \\ 0 & \Delta_1 & \theta_2 E & -\theta_3 E \\ \theta_2 E & \theta_1 E & \Delta_2 & 0 \\ \theta_2 E & -\theta_3 E & 0 & \Delta_2 \end{Vmatrix},$$

Δ_1 et Δ_2 étant les matrices (à quatre lignes et quatre colonnes)

$$\Delta_1 = \begin{Vmatrix} 2\theta_4 & 0 & \theta_2 & \theta_1 \\ 0 & 2\theta_4 & \theta_2 & -\theta_3 \\ \theta_2 & \theta_1 & \theta_4+\theta_5 & 0 \\ \theta_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_4+\theta_5 \end{Vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{Vmatrix} \theta_4+\theta_5 & 0 & \theta_2 & \theta_1 \\ 0 & \theta_4+\theta_5 & \theta_2 & -\theta_3 \\ \theta_2 & \theta_1 & 2\theta_5 & 0 \\ \theta_2 & -\theta_3 & 0 & 2\theta_5 \end{Vmatrix},$$

$$\theta_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1} - i\frac{\partial S}{\partial x_2}, \quad \theta_2 = \frac{\partial S}{\partial x_1} + i\frac{\partial S}{\partial x_2}, \quad \theta_3 = \frac{\partial S}{\partial x_3}; \quad \theta_4 = \frac{\partial S}{\partial x_4} + \mu_0 c, \quad \theta_5 = \frac{\partial S}{\partial x_4} - \mu_0 c.$$

Multiplions par les matrices (à seize lignes et seize colonnes)

$$\begin{Vmatrix} \Delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_2 E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_2 E \end{Vmatrix}.$$

Ceci revient à multiplier les matrices des colonnes 1, 2, 3, 4 respectivement par Δ_2, θ_2, θ_2 et détΔ par $\theta_2^4\theta_2^4$ détΔ_2. Retranchons des matrices de la première colonne celles des deux dernières, il vient

$$\text{dét}\,\Delta = \frac{1}{\text{dét}\,\Delta_2}\,\text{dét}\begin{Vmatrix} \Delta_1\Delta_2 - (\theta_3 E)^2 - (\theta_1 E)(\theta_2 E) & 0 & \theta_2 E & \theta_1 E \\ 0 & \Delta_1 & \theta_2 E & -\theta_3 E \\ 0 & \theta_1 E & \Delta_2 & 0 \\ 0 & -\theta_3 E & 0 & \Delta_2 \end{Vmatrix}$$

$$= [\text{dét}\,\|\Delta_1\Delta_2 - (\theta_3 E)^2 - (\theta_1 E)(\theta_2 E)\|]^2 = \left(4\frac{\partial S}{\partial x_4}\right)^4 \left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x_4}\right)^2 + \mu_0^2 c^2\right]^4.$$

Ce qui nous mène bien à l'équation de Jacobi. En conclusion, les caractéristiques des équations d'évolution, dans l'espace à cinq dimensions, sont les solutions de l'équation

$$\text{dét}\left\| -\frac{\partial S}{\partial x_4} E + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\Sigma_p a^{p}_i}{n} + \mu_0 c \frac{\Sigma_p a'^{p}_i}{n} \right\| = 0.$$

Elles ne sont autres que les solutions de l'équation de Jacobi de la relativité restreinte. Dans l'espace à quatre dimensions, les conclusions sont les mêmes, mais le terme $\mu_0 c$ disparaît.

(*) E et o désignent ici respectivement la matrice unité et la matrice nulle à quatre lignes et quatre colonnes.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la relation de Uhlenbeck et Laporte pour le photon.* Note de M. **Léon Bloch.**

La relation de Uhlenbeck et Laporte pour l'électron de Dirac s'écrit

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \sigma_4}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\sigma} = -m_0 c I_2. \tag{1}$$

Les grandeurs σ_x, σ_y, σ_z sont les densités de valeurs moyennes du spin. L'interprétation de σ_4 et de I_2 est moins bien connue.

La théorie du photon de M. L. de Broglie fait intervenir 32 opérateurs F, dont 16 sont symétriques et 16 antisymétriques. Ce sont entre autres les opérateurs

$$\frac{A_4 \pm B_4}{2},$$

$$\frac{iA_2A_3 \pm iB_2B_3}{2}, \quad \frac{iA_3A_1 \pm B_3B_1}{2}, \quad \frac{iA_1A_2 \pm iB_1B_2}{2}, \quad \frac{iA_1A_2A_3 \pm iB_1B_2B_3}{2},$$

$$\frac{A_1A_2A_3A_4 \pm B_1B_2B_3B_4}{2}.$$

Les A et les B sont des matrices qui agissent sur la fonction d'onde Φ_{ik} comme les matrices α de Dirac agissent sur la fonction d'onde Ψ_k, les A n'opérant que sur les indices i et les B que sur les indices k (avec inversion de signe pour B_2 et B_4).

A l'aide des opérateurs F, M. L. de Broglie a construit un certain nombre de grandeurs *électromagnétiques* attachées au photon. Guidé par l'idée que les effets électromagnétiques sont toujours corrélatifs d'une destruction du photon, il a imposé aux grandeurs *électromagnétiques* la forme $\Phi^0 F \Phi$, où Φ est la fonction d'onde du photon dans son état actuel, Φ^0 sa fonction dans l'état d'annihilation.

Il est facile de vérifier avec M. L. de Broglie que les opérateurs ci-dessus ne conduisent à des grandeurs électromagnétiques différentes de zéro que si l'on utilise le signe —. Les équations auxquelles obéissent ces grandeurs sont des équations *non maxwelliennes*, parmi lesquelles figure une équation *identique de forme* à l'équation (1), mais où σ_x, σ_y, σ_z sont les composantes de l'*antipotentiel*, les grandeurs σ_4 et I_2 restant de signification un peu confuse.

L'équation dont nous venons de parler ne semble toutefois pas être l'homologue exact de l'équation de Uhlenbeck et Laporte. Nous avons dit que, dans le cas de l'électron, les σ_x, σ_y, σ_z sont les composantes du *spin*. Or le photon possède lui aussi un spin S_x, S_y, S_z. Celui-ci n'est pas une grandeur électromagnétique. Il est convenable de l'associer à un opérateur F par la formule

$$S = \Phi^{*l'} F \Phi^l, \tag{2}$$

où l désigne l'état actuel du photon, l' un autre état *distinct de l'état d'annihi-*

lation (état O). Quand F est un opérateur du type $A + B$, on sait que pour le calcul des densités d'éléments de matrices $S_{ll'}$, il convient de remplacer dans (2) F par $AB_4 + BA_4$. Si $l = l'$, la formule définit alors une densité de valeur moyenne.

L'opérateur F associé au spin du photon est l'opérateur *symétrique*

$$\frac{iA_2A_3 + iB_2B_3}{2}, \quad \frac{iA_3A_1 + B_3B_1}{2}, \quad \frac{iA_1A_2 + B_1B_2}{2}.$$

Les opérateurs associés à S_4 et à $\mathcal{J}_2$ sont

$$-\left[\frac{iA_1A_2A_3 + iB_1B_2B_3}{2}\right] \quad \text{et} \quad \frac{A_1A_2A_3A_4 + B_1B_2B_3B_4}{2}.$$

Nous disons que l'on peut écrire une équation (non maxwellienne) identique de forme à la relation de Uhlenbeck et Laporte, et où les S, comme les σ, *ont la signification du spin*. Les calculs sont identiques à ceux qui permettent de vérifier la relation de Uhlenbeck et Laporte pour l'électron.

Dans le cas de l'onde plane monochromatique, on établit aussi les formules

$$(3) \qquad S_4 = S_z \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}, \quad \mathcal{J}_2 = 0 \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{|\vec{k}|}{\Delta} = \frac{|\vec{k}|}{k + \frac{2\pi}{h}\mu_0 c}.$$

Comme dans le cas électronique, on a $S_4 \sim S_z$ quand $(2\pi/h)\,\mu_0 c$ est négligeable devant k, c'est-à-dire $\mu_0 c^2$ devant W.

CHALEUR. — *La loi de la convection naturelle. Les divers régimes de convection.* Note [1] de M. **Pierre Vernotte**, présentée par M. Aimé Cotton.

Nous avions cru reconnaître que le phénomène de convection naturelle (l'expérience étant corrigée du rayonnement proprement dit) ne tendait pas vers la conduction pure lorsque la différence de température θ commandant le flux de chaleur tendait vers zéro, et nous avions émis l'hypothèse que cette discontinuité serait corrélative de l'existence d'un infra-régime de convection.

Un examen plus approfondi des faits nous a conduit à nier la discontinuité, sans supprimer pour autant l'infra-régime.

Nous avons en effet rectifié la mesure des toutes petites différences θ, corrigé le calcul des flux de chaleur [résultant parfois d'une dérivation, laquelle a été conduite selon la nouvelle procédure créée [2]] et amélioré l'extrapolation vers la différence de température nulle [la variable naturelle, pour conduire l'extrapolation vers $\theta = 0$, étant $\theta^{1/6}$ comme nous l'avons indiqué [3], et non la variable classique $\theta^{1/4}$ d'abord utilisée].

---

(1) Séance du 20 novembre 1944.

(2) *Comptes rendus*, 219, 1944, p. 579.

(3) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 976.

La continuité apparente entre convection et conduction a d'abord résulté des expériences de M. Charles Bory ([4]), ([5]) sur des fils fins de platine (évaluation plus correcte des températures), puis de l'étude d'un petit four ellipsoïdal en argent (extrapolation mieux faite), enfin de l'étude des échanges de chaleur entre cylindres concentriques de duralumin (flux de chaleur mieux calculé).

Dans les trois cas le rayonnement était assez bien connu; il était faible dans le 3ᵉ cas et surtout dans le 2ᵉ.

Défalcation faite des effets du rayonnement, le coefficient de convection se présente, en fonction de la variable $\theta^{1/6} = \delta$, comme une expression linéaire, ayant pour ordonnée à l'origine la conduction pure *a priori* calculable, et compliquée d'un terme en δ^7, dont l'influence se fait sentir plus ou moins tôt ([5]).

L'écoulement d'un fluide peut se faire, dit-on, selon trois régimes : aux très petits nombres de Reynolds, joue la loi de Poiseuille, la résistance étant proportionnelle à la vitesse; aux nombres plus grands, c'est le régime qu'on peut dire aéronautique, caractérisé par la persistance des lignes de courant, avec une loi de résistance voisine du carré de la vitesse; ensuite c'est le régime turbulent (qui peut être multiple), caractérisé par la dislocation de toute ligne de courant et une résistance proportionnelle au carré de la vitesse (l'écoulement dans les tubes ne connaît que le 1ᵉʳ et le 3ᵉ de ces régimes).

Dans la convection naturelle, la vitesse, due à l'échauffement du corps chaud, est proportionnelle à sa racine carrée et, la force aérodynamique étant proportionnelle à cet échauffement, la convection connue appartiendrait au 2ᵉ régime, et, pour les *nombres de Reynolds* très grands, réalisés par exemple avec les corps chauds de grande dimension, au 3ᵉ régime. L'infra-régime que nous soupçonnions correspondrait à un écoulement suivant la loi de Poiseuille.

Or il faut noter qu'en réalité les 1ᵉʳ et 2ᵉ régimes n'en font qu'un, défini par les équations de la mécanique des fluides visqueux avec lignes de courant effectives. La seule distinction à faire, c'est que le 2ᵉ régime est un régime visqueux non parfaitement établi, ce qui fait intervenir une variable de plus, et donne aux lois une allure très compliquée, en même temps qu'une fonction du type exponentiel à allure rapide fait quitter très brusquement la loi de Poiseuille, d'où l'apparence du régime aéronautique distinct du régime de Poiseuille.

L'infra-régime de convection ne serait donc pas un régime distinct. Il ne pourrait se marquer que par un changement d'allure de la courbe du coefficient de convection en fonction de δ. Est-ce compatible avec l'expérience ?

Nous avons montré ([3]) (généralisant un calcul de M. Ribaud) que, l'écoulement étant toujours au moins partiellement organisé *en amont* de l'obstacle, le coefficient de convection était, en 1ʳᵉ approximation, fonction linéaire de la

---

([4]) Ch. Bory, *Public. Scient. et Techn. du Minist. de l'Air;* série Grise, nº **189**.

([5]) Ch. Bory et P. Vernotte, *Comptes rendus*, **218**, 1944, p. 146.

racine cubique de la vitesse maximum U; et, dans le cas normal, la vitesse du courant fluide léchant le corps chaud étant proportionnelle à la racine carrée de l'échauffement θ, le coefficient de convection naturelle serait fonction linéaire de $\theta^{\frac{1}{6}}$, et c'est ainsi que s'introduit $\frac{1}{6}$. Aux valeurs ordinaires de θ, on peut établir une relation $\theta = BU^2$ qui tient compte de la force vive de l'écoulement et de la résistance visqueuse. Aux valeurs extrêmement faibles de θ, on aurait une relation $\theta = AU$, le calcul de A pouvant être assez facilement amorcé (la distribution de la température autour du corps chaud est toute différente suivant que le milieu ambiant est fluide ou solide : autour d'un corps limité dans toutes ses dimensions, θ décroît en gros suivant l'inverse du cube de la distance dans un fluide, et l'inverse de la distance dans un solide). On obtient, pour θ quelconque, une schématisation suffisante en écrivant $\theta = AU + BU^2$.

Or, U étant proportionnel, en 1re approximation, au cube de l'excédent h du coefficient de convection sur l'effet de conduction pure, cette formule s'écrit

$$A'h^3 + B'h^6 = \theta.$$

La courbe $h(\theta)$ part de l'origine avec tangente horizontale, présente un point d'inflexion, et tend vers une asymptote inclinée, correspondant pratiquement à la convection naturelle ordinaire, *laquelle asymptote passe par l'origine*.

Plus précisément, hors de cette approximation, la courbe présente non une asymptote, mais une 2e inflexion, qui est le début pratique de l'arc expérimental, la courbe se relevant ensuite fortement. Cette tangente d'inflexion *passe par l'origine*. Autrement dit, on démontre ainsi que la courbe du coefficient de *convection naturelle*, telle qu'on peut la tracer, *tend* bien vers la *conduction pure*, l'infra-régime ne se manifestant que par un point d'inflexion très près de l'origine.

L'écart de température θ en ce point caractéristique, difficilement accessible à cause de sa petitesse, est inversement proportionnel au cube du rapport de similitude dans le cas d'un corps chaud quelconque, et à la 1re puissance du diamètre dans le cas d'un fil horizontal.

Les points anormalement aberrants dans la courbe expérimentale $h(\theta)$ seraient à rattacher non à des passages accidentels de l'infra-régime au régime normal, mais à la possibilité, signalée par M. Camichel, et trouvée en convection [1] par M. Bory, de plusieurs modes géométriques d'écoulement.

OPTIQUE PHYSIQUE. — *Sur un cas de diffraction apériodique. Application.* Note de M. **André Couder**, présentée par M. Aimé Cotton.

En vue d'étudier un astre de faible éclat au voisinage d'un astre brillant, il peut être avantageux de modifier la répartition de l'énergie diffractée de telle sorte que l'éclairement du champ se trouve réduit dans une région située à une distance de l'image géométrique égale, par exemple, à 10 ou 20 fois la limite

de résolution de l'objectif utilisé. On emploie d'ordinaire pour cela des diaphragmes de contours polygonaux. J'ai cherché à atteindre le même résultat en conservant la pleine ouverture circulaire de l'objectif, mais en interposant un filtre absorbant, qui modifie localement la valeur du facteur de transmission, sans introduire d'ailleurs aucune différence de phase.

1. Les anneaux d'ordre élevé ne sont observables qu'en lumière étroitement monochromatique; ils ne peuvent pas l'être dans les conditions normales de l'observation astronomique, visuelle ou photographique. La valeur asymptotique de l'éclairement E du champ est donc donnée en réalité par l'expression monotone

$$E = \frac{1}{2}\,\frac{8}{\pi n^3}, \qquad \text{en posant } n = \frac{\pi D x}{\lambda f},$$

où D est le diamètre de l'objectif de centre O, f sa longueur focale, $x = \mathrm{FM}$ la distance linéaire du point considéré du champ, M, à l'image géométrique F, enfin λ, une valeur moyenne de la longueur d'onde caractérisant le domaine spectral utile.

Il est aisé d'observer quelles régions de l'objectif contribuent effectivement à éclairer le point M. Il suffit, en employant une source ponctuelle intense, de recevoir, sur la pupille de l'œil, le flux qui éclaire une petite aire entourant M. Comme la théorie le fait prévoir, l'objectif tout entier paraît obscur, à l'exception de deux courts arcs de son contour qui ont chacun pour milieu une extrémité du diamètre de l'ouverture situé dans le plan OFM. Quand x croît, ces arcs deviennent de moins en moins brillants, de plus en plus courts.

2. J'ai employé un filtre ainsi constitué. Sur une lame de verre plane, posons une lentille légèrement convexe; emplissons l'intervalle d'un liquide absorbant; nous réalisons un filtre dont le facteur de transmission $\tau(\xi)$, à la distance ξ du point de contact o, a pour valeur $\tau(\xi) = 10^{-K\xi^2}$. Pour plus de commodité, j'ai employé un liquide formant par refroidissement une masse gélatineuse stable; j'ai donné à la surface externe de la lentille une faible courbure concave, telle que la puissance du filtre soit nulle. Le filtre est placé dans le faisceau de telle sorte que oF soit perpendiculaire en son centre o. Appelons y la distance oF réglable; l'aire du filtre qui est éclairée a pour rayon $\Xi = \mathrm{D}y : 2f$. Nous supposons que $x(f - y) : f$ est négligeable comparé à Ξ.

3. Voici les résultats observés. Plaçons comme ci-dessus la pupille de l'œil en M. La surface de l'objectif ne devrait plus être entièrement obscure; cependant l'œil la juge encore telle et voit seulement les arcs lumineux du contour, dont l'intensité est évidemment réduite à la valeur de la transmission marginale du filtre. En conséquence, la partie principale de l'éclairement en M est maintenant $\mathrm{E}.\tau(\Xi)$. Examinons l'image avec un oculaire. A mesure que y croît, et que par conséquent la transmission marginale décroît, on voit la tache centrale de la figure de diffraction grossir, tandis que les premiers anneaux qui l'entourent perdent leur contraste et les plus lointains leur éclat. Tous

disparaissent complètement et l'on ne perçoit plus qu'une tache régulièrement dégradée lorsque la transmission marginale est de l'ordre de 1:10. A ce moment, le diamètre efficace de la tache, comparé à ce qu'il serait en l'absence d'absorption, est environ 1,7.

Remarque. — Cette observation exige quelques précautions. En effet, pour que la figure de diffraction soit aisément observable, le diamètre du faisceau admis par l'œil doit être inférieur à $0^{mm},5$; inévitablement on a une vision sténopéique des défauts d'homogénéité des milieux de l'œil, qui se traduisent par l'apparition de franges circulaires; de même pour les menus défauts de polissage des verres de l'oculaire. Le caractère adventice de ces franges se manifeste lorsqu'on déplace l'image dans le champ et qu'on remue légèrement la tête. Enfin, pour bien juger l'assombrissement du champ, il faut employer un objectif d'un poli excellent et éliminer la lumière diffusée par les milieux de l'œil en occultant l'image.

4. Outre l'application envisagée ci-dessus, l'usage du filtre à transmission variable que j'ai décrit m'a encore paru très profitable pour masquer l'imperfection d'un objectif affecté à un degré notable d'aberration de sphéricité : l'auréole qui entoure, dans ce cas, l'image formée au foyer des rayons paraxiaux est pratiquement supprimée, alors que la tache centrale est à peine modifiée. Il n'est pas douteux qu'un fitre de même construction, mais doué d'une transmission sélective convenablement choisie, atténuera de même les effets du spectre secondaire, si importants dans les grands instruments.

Pour les applications, le filtre utilisé en permanence doit être placé dans un plan conjugué de l'objectif par rapport à un système collecteur : ainsi son emploi est compatible avec l'usage d'un champ étendu.

COLLOÏDES. — *Essai d'interprétation des phénomènes de gonflement et de coacervation.* Note de M. **Dikran G. Dervichian**, présentée par M. Jacques Duclaux.

L'acide oléique et l'eau sont insolubles l'un dans l'autre. Si l'on met un savon acide (mélange d'acide oléique et d'oléate de K par exemple) au contact de l'eau, on obtient deux phases liquides en équilibre dont l'une est très riche en savon acide [60 à 70 % dans le cas du caprylate acide de Na [1]], alors que l'autre n'en contient pratiquement pas : le savon acide gonfle mais ne se dissout pas. Enfin avec les savons neutres coexistent, pour certaines proportions d'eau, d'une part une solution optiquement anisotrope contenant par exemple environ 20 % de savon, et d'autre part une solution isotrope contenant 18 % de savon. La première de ces phases peut être considérée comme du savon gonflé par l'eau, la seconde comme une solution de savon dans l'eau. Ici la zone des

(1) P. Ekwal, *Koll. Zeits.*, 97, 1941, p. 71.

proportions donnant lieu à la démixtion est très étroite, n'étant comprise qu'entre 18 et 20 %. Le cas de l'oléate acide apparaît ainsi comme un moyen terme entre les cas extrêmes que représentent l'acide oléique et le savon neutre.

La même gradation peut s'observer, non plus en réalisant des mélanges, mais en modifiant la structure de la molécule et y faisant apparaître un nombre plus ou moins grand de groupes fonctionnels solubles ou insolubles. Les triglycérides sont rigoureusement insolubles dans l'eau, alors que la lysocithine y est très soluble. Or la molécule de la lysocithine dérive de celle d'un triglycéride par perte de deux chaînes hydrocarbonées à caractère insoluble et l'acquisition d'une fonction amino-alcool phosphorylée en plus de la fonction alcool libre de la glycérine, toutes deux solubilisantes. La lécithine se place entre ces deux cas extrêmes avec ses deux chaînes d'acides gras insolubles contre-balançant l'hydrophilie du groupe choline phosphorylée. Aussi la lécithine donne-t-elle, en équilibre, une phase anisotrope gonflée et une solution isotrope diluée [2]. Enfin, dans la myéline des tissus nerveux, la présence du cholestérol, rigoureusement insoluble, à côté des phospholipides, supprime complètement la phase représentant la dissolution dans l'eau.

Cette gradation nous amène à la même conclusion que Bungenberg de Jong [3] au sujet de la coacervation : ce phénomène correspondrait à un stade précédent la floculation. Encore plus suggestive est la remarque faite par Dobry [4], lorsqu'elle rattache la coacervation à un caractère intermédiaire entre la solubilité et l'insolubilité. Le but de la présente Note est de préciser les conditions de formation de cette démixtion particulière qu'est la coacervation, de même que celles du phénomène de gonflement, en les faisant rentrer dans le même cadre général.

En se rapportant aux déterminations de Stauf, faites par la diffraction des rayons X, il apparaît que le nombre de couches d'eau, intercalées entre les feuillets du savon dans la phase anisotrope en équilibre avec la solution isotrope, ne dépasse pas 4. C'est aussi à 4 couches d'eau que se limite le gonflement des argiles. Or il s'agit, dans ces deux cas, de micelles planes. Si l'on s'adresse au mélange de gomme arabique et de gélatine [3], on constate que la concentration de la phase coacervée est de l'ordre de 13 %. En admettant qu'il s'agisse là de particules filiformes d'une épaisseur moyenne de 6 Å (moyenne entre l'épaisseur et la largeur d'une chaîne polypeptidique ou d'une chaîne glucidique), un calcul élémentaire conduit encore à une épaisseur d'eau, séparant les filaments parallèles, qui n'est pas supérieure à 4 couches.

On admet que, dans le cas des argiles, l'eau de gonflement adopte une structure hexagonale, compatible avec celle de la micelle. Il en est de même

---

(2) G. Friedel, *Comptes rendus*, 185, 1927, p. 330.

(3) *La Coacervation*, Paris, 1936.

(4) *J. Chimie phys.*, 35, 1938, p. 391; *Bull. Soc. Chim. Biol.*, 22, 1940, p. 75.

avec les savons au-dessus du point de Krafft, lorsque les chaînes d'acides gras sont arrangées en symétrie hexagonale. Au-dessous de cette température, l'arrangement des chaînes relève du système orthorhombique; le savon devient anhydre, car la structure de l'eau ne s'y adapte plus. Mais la structure hexagonale de l'eau est instable à la température ou à la pression ordinaire; si elle s'établit à l'intérieur des feuillets de l'argile ou du savon, c'est qu'elle est imposée. Avec un nombre plus grand de couches d'eau, la contrainte ne se fait plus sentir, l'eau prend sa structure tétraédrique normale dont le nouvel arrangement se répercute de l'intérieur vers les faces polaires. Or, sous cette forme, l'adaptation entre les faces des micelles n'est plus possible, l'eau ne peut rentrer dans la structure du savon ou de l'argile et *la solution se retourne*, c'est la micelle qui rentre dans la structure de l'eau, si toutefois cela est possible. S'il n'y a pas solubilité, la seule phase possible reste celle du gonflement pur et simple.

D'une façon plus générale, le colloïde peut rentrer dans la structure de l'eau (dissolution) jusqu'à une certaine proportion, qui n'a aucune raison d'être égale à celle de la phase inverse (gonflement). La démixtion correspond ainsi à la zone des proportions intermédiaires. Dans la phase gonflée ou coacervée, l'épaisseur du liquide intercalé restant égale à 4 couches, la concentration dépend évidemment de la forme et des dimensions des micelles, ainsi que de la densité relative du solvant; on peut s'attendre dès lors à ce qu'elle puisse tomber aux 5 à 6 % observés avec la coacervation de l'acétyl-cellulose dans le chloroforme ([4]).

MÉTALLURGIE. — *Influence du grain d'un métal sur la vitesse de fluage.* Note ([1]) de M. **Charles Crussard**, présentée par M. Albert Portevin.

La déformation visqueuse d'une éprouvette polycristalline de métal dépend non seulement des propriétés mécaniques des grains, mais aussi de celles des joints. En particulier, dans les expériences de fluage sous charge constante, on sait que, si la température est suffisante, la vitesse d'allongement commence par décroître pour atteindre ensuite une valeur minimum, correspondant à une inflexion, plus ou moins longue, de la courbe de fluage; cette *vitesse stationnaire* varie avec la dimension des grains des éprouvettes, toutes choses égales d'ailleurs. Rosenhain ([2]) et de nombreux auteurs ([3]) ont montré qu'aux basses températures le joint est plus résistant que le grain; les éprouvettes à gros grains flueront donc plus vite que celles à grain fin. A haute température, c'est l'inverse qui se produit. Entre les deux doit donc exister une température de transition, caractérisée par une égale résistance mécanique des grains et des joints, et que l'on appelle *température d'équicohésion*.

([1]) Séance du 4 décembre 1944.

([2]) *J. Inst. Met.*, 2, 1912, p. 149; 2, 1913, p. 119.

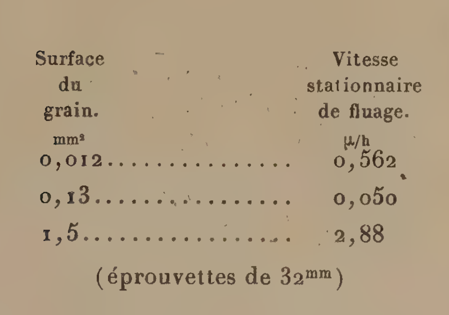
([3]) Notamment White et Clark, *Trans. American Society for Metals*, 25, 1937, p. 863; W. Siegfried, *Annales Suisses*, 9, 1943, p. 1.

On admet aujourd'hui, couramment, que ces idées sont confirmées par l'expérience. Mais, contre cette assertion, il convient de relever certains essais ([4]), où des éprouvettes à gros grain, portées à des températures certainement supérieures à celles d'équicohésion pour le métal considéré, se trouvent fluer aussi vite ou plus vite que d'autres à grain fin. Il y a donc là une contradiction apparente à lever. Or il est à remarquer que, pour étudier la variation de la vitesse de fluage en fonction de la grosseur du grain, les auteurs n'utilisent que deux valeurs de cette grosseur. Aussi m'a-t-il paru utile d'en augmenter le nombre et, dans les mêmes conditions de charge et de température, d'étudier divers cas de grosseur.

A cet effet j'ai utilisé deux séries d'éprouvettes, d'aluminium et de zinc extra purs; les diverses grosseurs de grains, allant jusqu'au cristal unique, étaient obtenues par recristallisation après des écrouissages plus ou moins forts.

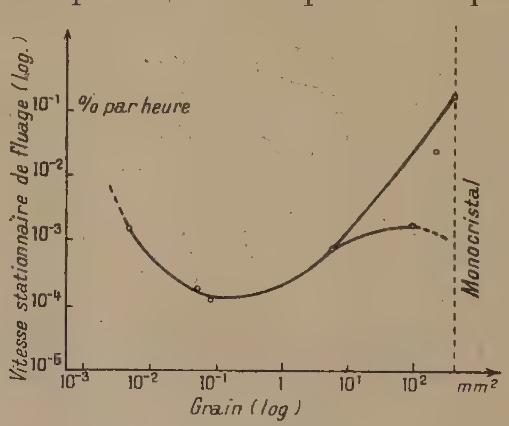
Il fallait avant tout définir la température d'équicohésion des métaux employés. J'ai pour cela combiné les mesures classiques de vitesses stationnaires de fluage avec d'autres observations ([5]), telles que la forme des courbes ([6]), l'aspect des diagrammes de rayons X, ou la nature des ruptures (transcristalline ou intergranulaire). En outre, pour l'aluminium, j'ai aussi regardé, sur surfaces polies électrolytiquement, si la déformation se produisait surtout par glissements cristallins, ou par mouvements relatifs des grains mettant les joints en relief. J'ai trouvé ainsi que la température d'équicohésion était voisine de 170° pour l'aluminium employé, et de l'ambiante pour le zinc.

Pour les expériences de fluage proprement dites, j'ai enregistré deux séries de courbes à des températures nettement supérieures à la température d'équi-



Surface du grain.	Vitesse stationnaire de fluage.
mm^2	μ/h
0,012	0,562
0,13	0,050
1,5	2,88

(éprouvettes de 32^{mm})



cohésion : soit 95° pour le zinc (sous 500 g/mm²) et 200° pour l'aluminium (sous 278 g/mm²). Le tableau résume les résultats pour Zn, et la figure pour Al.

([4]) Greenwood, *J. Inst. Met.*, 1, 1939, p. 135; Hanffstengel et Hanemann, *Z. Metallk.*, 1938, 30, p. 41, Betty, *Proc. American Society for Testing Materials*, 2, 1932, p. 193.

([5]) *Rev. Mét.*, 41, 1944, p. 45.

([6]) La partie arrondie et ralentie qui précède la vitesse stationnaire est très courte au-dessus de la température d'équicohésion. Avec un peu d'habitude, on peut ainsi déterminer rapidement cette dernière.

Sur la figure on constate, pour les éprouvettes monocristallines, une grande dispersion qui disparaît pour les polycristaux par une compensation statistique.

Ces expériences prouvent que, contrairement aux assertions classiques, la vitesse stationnaire de fluage au-dessus de la température d'équicohésion ne décroît pas régulièrement quand le grain croît, mais passe par un minimum. La contradiction que nous avions signalée n'est donc qu'apparente : les expériences classiques portent sur des grains fins tels qu'on en rencontre en général dans l'industrie, et correspondent à des points situés sur la branche de gauche de la courbe ci-dessus; les autres, qui semblaient les contredire ([4]), sur celle de droite.

Ce minimum s'explique aisément par les actions opposées de deux effets dus aux joints : d'une part ceux-ci gênent les glissements plastiques des cristaux; d'autre part ils constituent une zone de transition, à structure d'autant plus perturbée que le métal est plus déformé; cette zone est le siège, non plus de glissements cristallins, mais d'un fluage quasi amorphe, qui peut être très rapide à haute température.

Cette manière de concevoir le rôle des joints laisse prévoir que la température d'équicohésion est, non plus constante, comme on l'admet généralement, mais variable avec les conditions expérimentales (croissante avec la charge de fluage ou la vitesse de traction). C'est ce que j'ai vérifié : pour une éprouvette d'aluminium étirée rapidement à 200° (3 % en quelques secondes), l'examen du relief des joints prouve qu'on est en dessous de la température d'équicohésion, alors que nous avions trouvé 170° pour des vitesses de l'ordre de 10^{-3} % par heure; dans le cas du zinc, cette température est en dessous de l'ambiante pour le fluage sous faible charge, et au-dessus pour les fortes charges. Mais, pour la changer de quelques dizaines de degrés, il faut une variation considérable de la vitesse de déformation.

Signalons enfin que l'existence d'un minimum de la vitesse de fluage, quand le grain varie, peut avoir une importance pratique dans certaines réalisations industrielles.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Quelques dérivés mixtes de l'acide mésodihydroanthracènedicarboxylique* cis. Note ([1]) de M. **Jean Mathieu**, présentée par M. Marcel Delépine.

L'anhydride de l'acide mésodihydroanthracènedicarboxylique, décrit anté-

C=O
H
O,
H
C=O

([1]) Séance du 6 novembre 1944.

rieurement [2], ouvre une voie d'accès facile à toute une série de dérivés et en particulier à des dérivés mixtes, c'est-à-dire à des composés où les fonctions issues des deux carboxyles ne sont pas identiques.

Il est assez difficile, en effet, de faire réagir de manières inégales les deux carboxyles d'un diacide, à moins que n'intervienne une inégalité de leurs aptitudes aux réactions, soit par des différences entre leurs positions, comme dans les acides camphoriques, soit par modification de la réactivité du second carboxyle quand le premier a réagi, comme dans l'acide oxalique. Dans le cas général, si l'on tente deux monoréactions d'un diacide symétrique, on obtient, avec l'acide inaltéré, le mono- et le di-dérivé, mélange souvent peu avantageux, sinon même inutilisable, pour la préparation du monodérivé. En fait les fonctions mixtes de diacides sont assez rarement décrites. Au contraire la monoréaction va de soi avec l'anhydride, puisque, en principe, l'action des réactifs laisse libre l'un des carboxyles.

Nous donnons à titre d'exemple quelques dérivés mixtes obtenus à partir de notre anhydride. En faisant réagir un alcool on obtient l'ester acide, que l'on peut transformer en ester chlorure d'acide, puis en ester amide, ou en diesters inégaux, dont nous avons deux spécimens : méthylique-éthylique et méthylique-phénylique. Avec l'ammoniac, nous avons obtenu l'acide amide. Les substances suivantes ont été préparées et analysées :

	F.	
Ester méthylique acide..........	178°	$CH^3O.CO(C^{14}H^{10})CO^2H = C^{17}H^{14}O^4$
» » chlorure d'acide..	106	$CH^3O.CO(C^{14}H^{10})COCl = C^{17}H^{13}O^3Cl$
» » amide..........	164	$CH^3O.CO(C^{14}H^{10})CO.NH^2 = C^{17}H^{15}O^3N$
» éthylique acide..........	141	$C^2H^5O.CO(C^{14}H^{10})CO^2H = C^{18}H^{16}O^4$
» » chlorure d'acide...	99	$C^2H^5O.CO(C^{14}H^{10})COCl = C^{18}H^{15}O^3Cl$
» » amide............	145	$C^2H^5O.CO(C^{14}H^{10})CO.NH^2 = C^{18}H^{17}O^3N$
Acide amide...................	296	$HO.CO(C^{14}H^{10})CO.NH^2 = C^{16}H^{13}O^3N$
Diester méthylique et éthylique...	86	$CH^3O.CO(C^{14}H^{10})CO.OC^2H^5 = C^{19}H^{18}O^4$
» » phénylique..	135	$CH^3O.CO(C^{14}H^{10})CO.OC^6H^5 = C^{23}H^{18}O^4$

Nous avons vérifié que nos diesters mixtes n'étaient pas des mélanges des deux esters symétriques. Le point de fusion, pris au bain d'acide, du mélange des diesters symétriques *cis*, diéthylique et diméthylique, varie de 70 à 140° environ, alors que l'ester mixte fond à 86-87°; celui du mélange des diesters symétriques *cis*, diphénylique et diméthylique, varie de 120 à 140°, alors que l'ester mixte fond à 135-136°.

Nous nous sommes également assuré que l'estérification de l'anhydride et sa transformation ultérieure en ester chlorure d'acide ne provoquaient aucune isomérisation. A cette fin on a transformé le chlorure-ester méthylique en

(2) J. Mathieu, *Comptes rendus*, 219, 1944, p. 620.

ester diméthylique; le corps ainsi préparé s'est montré identique à l'ester obtenu par estérification directe de l'acide *cis*. Tous les dérivés décrits ci-dessus appartiennent donc, comme l'anhydride lui-même, à la série *cis*.

MINÉRALOGIE. — *Sur l'origine de quelques anomalies présentées par les courbes thermiques de certaines montmorillonites*. Note de Mlle **Simonne Caillère** et M. **Stéphane Hénin**.

La courbe thermique différentielle d'une montmorillonite typique [1] est caractérisée par trois crochets endothermiques : le premier, placé vers 110°, accompagne le départ de l'eau ayant un caractère zéolitique; le second, vers 650°, correspond au départ de l'eau de constitution et le troisième, à 850°, traduit l'amorphisation du produit déshydraté avant sa recristallisation [2]. En général les deux derniers crochets sont également développés; or certaines courbes de montmorillonites algériennes font ressortir une inégalité très nette de ces deux inflexions. Ainsi, tandis que les courbes des échantillons de Camp-Bertaux et de Marnia montrent un second crochet très développé, celles des argiles de Biskra et de Géryville présentent un troisième crochet très accentué. Ayant constaté précédemment l'influence des bases échangeables sur les courbes thermiques du kaolin [3] et de la faratsihite [3], nous avons pensé que ces anomalies avaient une même origine.

D'autre part des auteurs américains [4] ont déjà signalé l'influence de certains cations sur la courbe thermique de la montmorillonite, en se limitant toutefois à l'étude du premier crochet.

En opérant sur des échantillons de montmorillonites, de divers gisements américains (Branchville, U. S. A.) et algériens, cités précédemment, nous avons étudié l'influence des cations suivants : H, Na, Mg, Ca, Ba, Al^{+++}, Fe^{+++}. Les résultats sont réunis dans le tableau ci-dessous. (La comparaison a été effectuée en prenant comme type, pour chaque échantillon, la courbe fournie par l'argile naturelle; d'autre part les produits traités avant d'être soumis à l'étude thermique ont été préalablement séchés à 100°.)

Ion fixé.	Action sur le 1er crochet.	Action sur le 2e crochet.	Action sur le 3e crochet.
H.....	faible	faible	faible augmentation
Na.....	diminution faible	accroissement net	diminution jusqu'à annulation
Mg.....	faible	faible	augmentation faible
Ca.....	faible	faible	augmentation faible
Ba.....	faible	faible	augmentation faible
Al.....	diminution nette	accroissement faible	augmentation nette
Fe.....	faible	augmentation	diminution

(1) J. Orcel et S. Caillère, *Comptes rendus*, 197, 1943, p. 628.

(2) H. Longchambon, *Recueil des communications du Congrès Tech. Industriel de Céramique*, Paris, 1938, pp. 75-133.

(3) S. Caillère et S. Hénin, *Comptes rendus*, 209, 1939, p. 684; 219, 1944, p. 458.

(4) L. B. Hendricks, R. A. Nelson et L. T. Alexandre, *Journ. Amer. Chem. Soc.*, 62, 1940, pp. 1453-1457.

Dans le but de généraliser ces observations on a préparé une montmorillonite Na en saturant l'échantillon de Branchville par une solution de chlorure de sodium à 5 %. Une fraction de cette argile a donné la courbe du type indiqué précédemment : grand crochet à 650°, inflexion faible à 850°. Le reste a été divisé en trois parties. Sur les deux premières il a été fixé respectivement des ions H et Ca. Chacune de ces argiles a fourni une courbe ayant les caractéristiques signalées dans le tableau.

La troisième partie, traitée par une solution de carbonate de soude à 5 %, a permis d'obtenir une courbe dans laquelle le second crochet est bien marqué et le troisième très affaibli.

Il y a lieu de remarquer, d'autre part, que diverses courbes et particulièrement celles fournies par les argiles Al présentent, succédant à l'inflexion endothermique à 850°, un léger phénomène exothermique, qui traduit peut-être la recristallisation signalée par H. Longchambon ([2]).

Il se dégage de ces observations que les deux premiers crochets, qui correspondent à des départs d'eau, sont influencés d'une manière assez analogue. Par contre le troisième et le quatrième crochet varient en sens inverse des deux premiers. Cependant l'ion Al diminue le premier et accentue les trois derniers, et l'ion Na augmente le deuxième et affaiblit les trois autres.

En résumé, en saturant de bases des montmorillonites nous avons pu préparer artificiellement des échantillons donnant des courbes ayant les singularités observées avec certaines argiles naturelles. Il est donc possible d'interpréter ces anomalies comme étant la conséquence de la fixation, par les montmorillonites, de divers cations sous l'influence des conditions de gisement.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Sur la chaîne de Markoff constituée par la succession des jours avec et sans pluie.* Note de M. **Henri Mineur**, présentée par M. Charles Maurain.

Nous dirons qu'un jour est sec si la hauteur de pluie observée est nulle, humide dans le cas contraire. Le problème que j'étudie ici est le suivant : la probabilité pour que le jour t soit s ou h dépend-t-elle du fait que les jours $t-1$, $t-2, \ldots, t-p$ ont été s ou h? p sera l'ordre de la chaîne s'il en est ainsi et si le jour $t-p-1$ n'intervient pas.

Pour étudier cette question, j'ai utilisé diverses méthodes :

Désignons par P_{ns} la probabilité pour qu'un jour pris au hasard soit le début d'une série de n jours s consécutifs. Les points (n, $\log p_{ns}$) doivent se placer sur une ligne droite pour $n \geq p-1$ les autres pouvant être hors de cette droite. On a un résultat analogue pour les séries de jours humides.

L'application de cette méthode aux observations faites de 1878 à 1939 à Clermont-Ferrand et au Parc Saint-Maur montre que la chaîne étudiée est d'ordre très élevé (au moins 7). Une chaîne simple représente assez bien l'observation

pour $n \leqq 14$, mais la probabilité des longues séries de jours s ou h est plus élevée que si la chaîne était simple.

Une autre méthode consiste à calculer les probabilités p_s, p_{sh}, p_{hh}, ... ainsi définies :

p_s, probabilité pour que le jour t soit s si l'on n'a pas d'information sur le jour $t-1$.

p_{hs}, probabilité pour que t soit si l'on sait que $t-1$ a été h.

p_{shs}, probabilité pour que t soit s si l'on sait que $t-1$ a été h et que $t-2$ a été s.

Citons seulement les résultats pour Clermont-Ferrand et pour l'été :

$$p_s = 9,619,$$

$$p_{ss} = 0,717, \quad p_{hs} = 0,459,$$

$$p_{sss} = 0,731, \quad p_{hss} = 0,682, \quad p_{shs} = 0,426, \quad p_{hhs} = 0,488,$$

$$p_{ssss} = 0,738, \quad p_{hsss} = 0,714, \quad p_{shss} = 0,707, \quad p_{hhss} = 0,657,$$

$$p_{sshs} = 0,454, \quad p_{hshs} = 0,403, \quad p_{shhs} = 0,492, \quad p_{hhhs} = 0,486.$$

La chaîne étudiée est au moins triple; on obtient le même résultat pour toutes les saisons et aussi pour les précipitations au Parc Saint-Maur.

Enfin, si l'on pose

$$q = P_{1s} + P_{2s} + P_{3s} + \ldots,$$

le coefficient de corrélation entre les jours t et $t-1$ est

$$r_1 = 1 - \frac{q}{p_s(1-p_s)}.$$

Citons les résultats pour Clermont-Ferrand :

	Printemps.	Été.	Automne.	Hiver.
r_1........	$+0,316 \mp 0,009$	$+0,258 \mp 0,011$	$+0,300 \mp 0,009$	$+0,294 \mp 0,009$

Le coefficient de corrélation partiel entre le jour t et le jour $t-2$, lorsque $t-1$ est connu, est

$$r_2 = \frac{p_s(1-p_s)(P_{1s}+P_{2s}) - q^2}{q[2p_s(1-p_s) - q]}.$$

On trouve pour r_2 des valeurs positives dont la moyenne est $+0,029$.

PALÉOBOTANIQUE. — *Sur la tige et les frondes de* Sphenopteris striata *Gothan*. Note [1] de M. **René Scriban**, présentée par M. Charles Jacob.

Le *Sphenopteris striata* Gothan [2] (*Sph. obtusiloba* Zeiller non Brongn.) est une espèce commune dans le Bassin houiller du Nord de la France. Sa détermination est facile, grâce aux stries fibreuses qui souvent couvrent les feuilles et aux caractères très nets des pinnules et des pennes de divers ordres.

---

(1) Séance du 13 décembre 1944.

(2) *Oberschl. Flora*, 1, 1924, p. 24, *Taf. V, fig.* 2, 2*a*; *Taf. VI, fig.* 3, 3*a*.

Cependant une imprécision subsistait en ce qui concerne l'édification générale de la fronde, et surtout on n'en connaissait pas jusqu'à présent les tiges.

La révision des échantillons déposés dans les collections du Musée houiller de Lille, ou appartenant au Laboratoire de Paléobotanique de Lille, et parmi lesquels il faut citer un lot important de grands exemplaires récoltés, en 1939-1940, par P. Corsin à Aniche et à Dourges, me permet aujourd'hui de combler cette lacune, en donnant les caractéristiques des tiges et quelques remarques complémentaires sur les frondes.

I. *Cycle phyllotaxique.* — Beaucoup d'axes, regardés jusqu'à présent comme de gros rachis, sont en réalité des tiges. Cette découverte est basée sur quinze segments d'axes, portant des pétioles dont les points d'attache sont placés dans des plans différents. La distance verticale séparant les points d'attache de deux rachis consécutifs est le plus souvent de 6 à 7^{cm}.

Le cycle phyllotaxique a pu être déterminé grâce à un échantillon de grande taille, montrant cinq pétioles disposés en hélice autour de la tige qui mesure 32^{cm} de longueur. Ce cycle est sénestre et de 2/5 comme celui de *Sphenopteris hœninghausi* Brongn.

II. *Caractères des tiges.* — Les tiges sont dressées et certaines ont jusqu'à 3^{cm} de largeur. Elles présentent des stries longitudinales serrées, correspondant aux zones fibreuses de l'écorce externe, et des cicatricules transversales correspondant à de fins piquants durs, en forme d'aiguillons de 1^{mm} de longueur. En outre elles portent cinq files longitudinales d'épines trapues, larges à la base de 3^{mm} environ, et coïncidant avec les cinq séries de rachis.

III. *Caractères des frondes.* — Les remarques suivantes découlent de l'examen de huit fragments de frondes, montrant des pétioles primaires bifurqués par dichotomie, comme celui décrit et figuré par Zeiller ([3]). J'ai observé un pétiole ayant 25^{cm} de la bifurcation à l'extrémité détachée de la tige.

Les rachis de tous ordres présentent, comme les tiges, des stries longitudinales et des cicatricules transversales. En outre les rachis primaires, en dessous de la bifurcation, mais pas toujours jusqu'à elle, portent deux rangées de grosses épines analogues à celles qui se trouvent sur la tige; ces rangées sont diamétralement opposées et situées dans le plan de la fronde. Enfin les huit rachis primaires observés sont nus, c'est-à-dire ne portent pas de pennes, contrairement à ce qui a été remarqué par Zeiller; mais la présence de pennes primaires sur les pétioles, en dessous de la bifurcation, est sans doute liée à la position de la fronde sur la tige.

Ainsi, par leur ornementation, tiges et pétioles de *Sphenopteris striata* ont un aspect bien caractéristique. La connaissance de la tige, du cycle phyllotaxique de la plante et de la morphologie des frondes peut permettre désormais un essai de reconstitution de cette Ptéridospermée.

La séance est levée à $16^{h}15^{m}$. L. B.

([3]) *Flore fossile de Valenciennes*, p. 65, *Pl. IV, fig.* I, *Pl. V, fig.* 1 et 2.

FIN DU TOME DEUX-CENT-DIX-NEUVIÈME.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Publications périodiques reçues pendant les années 1941, 1942, 1943, 1944.

L'Académie des sciences exprime ses remercîments aux Établissements qui lui ont envoyé leurs Publications.

La cote qui suit le titre de chaque périodique est celle de l'*Inventaire des périodiques scientifiques des bibliothèques de Paris* (1); les cotes du supplément I de cet inventaire portent un indice en chiffres, celles du supplément II, un indice en lettres.

Le titre des périodiques nouvellement créés est inscrit en caractères gras.

EUROPE.

France.

Argentan. — *Le Pays d'Argentan.*

Arras. — Académie des sciences, lettres et arts : *Mémoires*, M 553.

Autun. — Société Éduenne : *Mémoires*, S 488.

Auxerre. — Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne : *Bulletin*, B 1558.

Bayonne. — Société des sciences, lettres et arts : *Bulletin*, B 1553.

Besançon. — *Annales françaises de chronométrie*, A 1096^A.

Bordeaux. — Société linnéenne : *Extraits des procès-verbaux*, P 631^A; *Procès-verbaux*, P 631^A.

Clermont-Ferrand. — Société de physique biologique de France : *Comptes rendus des séances* (supplément aux *Archives de physique biologique*), A 2142.

— *Le document français.*

Clichy. — Établissements Debray : *Assemblée générale des actionnaires.*

Dax. — Société de Borda : *Bulletin*, B 1418.

Le Mans. — Société d'agriculture, sciences et arts de la Sarthe : *Bulletin*, B 1735.

Marseille. — École d'application du Service de santé des troupes coloniales : *Médecine tropicale.*

Nancy. — École nationale des eaux et forêts et Station de recherches et expériences forestières : *Annales*, A 854^1.

Parc-Saint-Maur. — Institut de physique du globe. Observatoire géophysique du Parc-Saint-Maur : *Bulletin séismique*, I 240^A.

Paris. — Académie d'agriculture de France : *Comptes rendus hebdomadaires des séances*, B 1861.

---

(1) Paris, Masson, 1924-1925; 4 fasc. et 2 suppléments (1929-1939), 23cm.

Paris. — Académie de médecine : *Bulletin*, B 894.
— Académie des sciences : *Annuaire*, I 235; *Comptes rendus hebdomadaires des séances*, C 758; *Mémoires*, H 69.
— Association amicale des anciens élèves de l'École centrale des arts et manufactures : *Communication*.
— Association de documentation scientifique, industrielle et commerciale : *Bulletin*, A 2283.
— Banque de France : *Assemblée générale des actionnaires*, B 14[2].
— Banque de l'Algérie : *Compte rendu de l'exercice*.
— Banque franco-polonaise : *Assemblée générale ordinaire*.
— Bon marché (Au) : *Assemblées générales*.
— Bureau des Longitudes : *Annuaire*, A 1370; *Connaissance des temps ou des mouvements célestes à l'usage des astronomes et des navigateurs*, C 921; *Éphémérides nautiques ou extraits de la Connaissance des temps*, C 921.
— Bureau Veritas : *Bulletin technique*, B 2504.
— Centre national de la Recherche scientifique : *Bulletin analytique*.
— Id. Service de recherches d'astrophysique : *Annales d'astrophysique*.
— Chantiers navals français : *Assemblées générales*.
— Club alpin français : *Revue* (*La Montagne*), B 1919.
— Collège de France. Institut d'hydrologie et de climatologie : *Annales*, A 868[2].
— Comité électrotechnique français et Union technique des syndicats de l'Électricité : *Revue générale de l'Électricité*, L 183.
— Commission du répertoire de bibliographie scientifique : *Bibliographie scientifique française*, B 247.
— Compagnie d'assurances générales contre l'incendie et les explosions : *Compte rendu à l'Assemblée générale des actionnaires*.
— Compagnie d'assurances générales sur la vie : *Comptes rendus à l'Assemblée générale des actionnaires*.
— Compagnie des Chemins de fer de l'Est : *Assemblées générales ordinaire et extraordinaire des actionnaires*.
— Compagnie des Chemins de fer de l'Ouest : *Rapport du Conseil de liquidation et de la Commission de contrôle des comptes de l'Assemblée générale ordinaire et extraordinaire des actionnaires*.
— Compagnie des Chemins de fer de Paris à Lyon et à la Méditerranée : *Assemblées générales ordinaire et extraordinaire; Rapport du Conseil d'administration*.
— Compagnie des Chemins de fer du Midi : *Assemblées générales ordinaire et extraordinaire des actionnaires; Rapport du Conseil d'administration*, R 71.
— Compagnie des minerais de fer magnétique de Mokta el Hadid : *Assemblée générale ordinaire*.
— Compagnie des Mines de houille de Marles : *Assemblées générales ordinaire et extraordinaire*.
— Compagnie des Mines d'Ostricourt : *Assemblée générale ordinaire*.
— Compagnie du Chemin de fer de Paris à Orléans : *Rapports du Conseil d'administration et de la Commission de vérification des comptes*, R 57.
— Compagnie française pour la location de matériel de transports « Locamat » : *Assemblée générale ordinaire*.
— Compagnie générale de construction de locomotives (Batignolles-Châtillon) : *Assemblée générale des actionnaires*.
— Compagnie générale d'entreprises automobiles : *Rapports présentés à l'Assemblée générale ordinaire*.

PARIS. — Compagnie générale du gaz pour la France et l'étranger : *Assemblée générale ordinaire des actionnaires.*
— Comptoir national d'escompte de Paris : *Assemblée générale ordinaire. Rapport.*
— Confédération générale de l'Éducation : **Bulletin d'information et de liaison.**
— Conseil d'hygiène publique et de salubrité du département de la Seine : *Compte rendu des séances,* C 742.
— Construction civile (la) : *Assemblée générale extraordinaire.*
— Crédit foncier de France : *Compte rendu présenté au nom du Conseil d'administration.*
— Crédit Lyonnais : *Rapport du Conseil d'administration à l'Assemblée générale ordinaire.*
— École normale supérieure : *Annales scientifiques,* A 1120.
— Électricité et gaz du Nord : *Rapport du Conseil d'administration.*
— Énergie électrique du littoral méditerranéen : *Assemblée générale ordinaire.*
— Énergie électrique du nord de la France : *Assemblée générale ordinaire.*
— Établissements Hutchinson : *Assemblée générale ordinaire.*
— Établissements Julien Damoy : *Rapport du Conseil d'administration.*
— Établissements Kuhlmann : *Compte rendu de l'Assemblée générale ordinaire.*
— Fly Tox (le) : *Assemblée générale ordinaire des actionnaires.*
— Institut de physique du globe. Observatoire géophysique : *Voir* PARC-SAINT-MAUR.
— Institut d'Optique. — *Voir* SAINT-CYR-SUR-MER.
— Institut international d'anthropologie : *Revue anthropologique,* R 1462.
— Institut national agronomique : *Annales,* A 872.
— Institut océanographique : *Annales,* A 873; *Rapport pour l'année,* I 257².
— Institut Pasteur : *Annales,* A 874.
— La Brosse et J. Dupont réunis : *Assemblée générale ordinaire.*
— Ministère de la production industrielle et du travail. Service de la propriété industrielle : *Bulletin officiel de la propriété industrielle,* C 98.
— Ministère des colonies : *Annales de médecine et de pharmacie coloniales,* A 820.
— Missions étrangères de Paris : *Échos missionnaires d'Extrême-Orient.*
— Muséum national d'histoire naturelle : *Bulletin,* B 2017.
— Observatoire de Paris : *Bulletin astronomique,* B 854.
— Office international d'hygiène publique : *Bulletin mensuel,* B 1042.
— Phénix (le) : *Compte rendu à l'Assemblée générale des actionnaires.*
— Préfecture de la Seine. Direction de l'hygiène, du travail et de la prévoyance sociale : *Annales des Services techniques d'hygiène de la Ville de Paris,* A 1062.
— Préfecture de police. Direction de l'hygiène, de la protection de l'enfance et du travail : *Rapport sur les opérations du service d'inspection des établissements classés dans le département de la Seine,* R 111 *bis.*
— Propaganda-Staffel : *La documentation hebdomadaire.*
— Révillon frères : *Assemblée générale ordinaire.*
— Secteur électrique de la Vallée de l'Oise : *Assemblée générale ordinaire.*
— Service hydrographique de la Marine : *Avis aux navigateurs : Liste des signaux distinctifs et indicatifs internationaux de Stations françaises; Section de documentation.*
— Services de la Carte géologique de la France : *Bulletin,* B 1863.
— Société anonyme de l'annuaire du commerce Didot Bottin : *Assemblée générale ordinaire.*
— Société anonyme des chantiers et ateliers de Saint-Nazaire : *Assemblée générale ordinaire.*

— Société anonyme des mines et fonderies de Pontgibaud : *Assemblée générale ordinaire.*
— Société anonyme des transports automobiles industriels et commerciaux : *Assemblée générale ordinaire.*
— Société astronomique de France : *L'Astronomie*, A 2471.
— Société centrale d'aquiculture et de pêche : *Bulletin*, B 1193.
— Société chimique de France : *Bulletin* (*Documentation, Mémoires*), B 1180.
— Société de biologie : *Comptes rendus des séances*, C 675.
— Société de chimie industrielle : *Chimie et Industrie*, C 342.
— Société de chimie physique : *Journal de chimie physique*, J 368.
— Société de géographie : *Annales de géographie*, A 837; *La Géographie*, G 233.
— Société d'encouragement pour l'industrie nationale : *Bulletin*, B 1296.
— Société de pathologie comparée et d'hygiène générale : *Revue de pathologie comparée*, R 1160.
— Société de pathologie exotique et de ses filiales : *Bulletin*, B 1488.
— Société de physique biologique de France : Voir Clermont-Ferrand.
— Société des agriculteurs de France : *Revue des agriculteurs de France*, B 1522.
— Société de secours aux blessés militaires des Armées de terre et de mer : *Assemblée générale.*
— Société des ingénieurs civils de France : *Bulletin*, B 1537; *Mémoires*, M 583.
— Société des mines d'Albi : *Rapport du Conseil d'administration.*
— Société d'optique et de mécanique de haute précision : *Assemblée générale ordinaire.*
— Société française de minéralogie : *Bulletin*, B 1685.
— Société française de Reports et Dépôts : *Assemblée générale ordinaire.*
— Société française des distilleries de l'Indochine : *Assemblée générale annuelle des actionnaires.*
— Société française des électriciens : *Bulletin*, B 1644.
— Société générale de constructions électriques et mécaniques Als-Thom : *Assemblée générale ordinaire.*
— Société géologique de France : *Bulletin*, B 1619; *Compte rendu sommaire des séances*, C 767; *Mémoires*, M 535.
— Société havraise d'énergie électrique : *Assemblée générale ordinaire.*
— Société mathématique de France : *Bulletin*, B 1658.
— Société nationale d'acclimatation : *Bulletin*, B 1762.
— Société nationale d'horticulture de France : *Bulletin mensuel*, A 952.
— Société Saint-Raphaël : *Assemblées générales extraordinaire et ordinaire.*
— Sociétés de pharmacie de Paris et de province : **Annales pharmaceutiques françaises.**
— Statistique générale de la France : *Études démographiques.*
— Touring Club de France : *Circulaire.*
— Union géodésique et géophysique internationale. Association de géodésie : *Travaux de l'Association internationale de géodésie*, T 449[1].
— Union sociale d'ingénieurs catholiques : *Écho* (*Documents et informations*), E 18; *Feuille documentaire; Fiches documentaires.*
— Union technique des syndicats de l'Électricité : *Voir* Comité électrotechnique français et Union technique des syndicats de l'Électricité.
— Urbaine (L'). Compagnie d'assurances contre l'incendie : *Comptes rendus des opérations à l'Assemblée générale ordinaire des actionnaires.*
— *Agence économique et financière.*

— *Annales de chimie*, A 832.
— *Annales de paléontologie*, A 1021.
— *Annales de physique*, A 832.
— *Annales des mines*, J 602.
— *Annales des ponts et chaussées*, A 1473.
— *Anthropologie (L')*, M 129.
— *Archives de physique biologique*, A 2142.
— *Archives hospitalières*, B 1003A.
— *Bip (Bulletin d'informations pratiques)*, B 362B.
— *Bulletin des sciences mathématiques*, B 1843.
— *Corps gras. Savons.*
— *Exportateur (L') français*, E 483.
— *Information (L') universitaire*, J 179.
— *Journal de chimie physique*, J 368.
— *Journal de la Bourse.*
— *Journal de mathématiques pures et appliquées*, J 467.
— *Journal de pharmacie et de chimie*, B 1787.
— *Journal des savants*, J 621.
— *Molière. La défense médicale.*
— *Nature (La)*, N 52.
— *Progrès (Le) médical*, P 684.
— *Revue de pathologie comparée et d'hygiène générale*, R 1166.
— *Revue générale des sciences pures et appliquées*, R 1362.
— *Revue internationale des industries agricoles.*
— *Revue scientifique illustrée* (Revue rose), R 1216.
— *Scène et monde.*
— *Technique (La) moderne*, T 50.

ROUEN. — Société normande d'études préhistoriques : *Bulletin*, B 1694².
SAINT-BRIEUC. — Société d'émulation des Côtes du Nord : *Bulletins et Mémoires*, M 494.
SAINT-CYR-SUR-MER. — Institut d'optique : **Cahiers de physique.**
SAINT-ÉTIENNE. — Société de l'industrie minérale : *Revue de l'industrie minérale*, R 1123.
TALENCE. — Observatoire : *Bulletin*, B 1032.
TOULOUSE. — Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres : *Mémoires*, H 74.
— Observatoire astronomique et météorologique : *Annales*, A 891.
VANNES. — Société polymatique du Morbihan : *Bulletin*, B 1712.

Allemagne.

BERLIN. — Preussische Akademie der Wissenschaften : *Abhandlungen*, M 944; *Jahrbuch.*
— *Mathematische Annalen*, M 141.
BONN. — Naturhistorischer Verein der preussische Rheinlande und Westfalens : *Decheniana*, V 89.
BRAUNSCHWEIG. — *Meteorologische Zeitschrift*, Z 38.
DRESDE. — *Photographie und Forschung*, P 280A.
GÖTTINGEN. — Akademie der Wissenschaften : *Gottingische gelehrte Anzeigen*, G 377; *Jahrbuch.*
— Id. Mathematisch-Physische Klasse : *Nachrichten*, N 5.
HALLE/SAAL. — Kaiserlich Leopoldinische Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher : *Nova acta Leopoldina (Abhandlungen)*, M 945.

LEIPZIG. — Sachsische Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Physische Klasse : *Berichte über die Verhandlungen*, B 185.

MÜNCHEN. — Bayerische Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Abteilung : *Abhandlungen*, A 36; *Sitzungsberichte*, J 122.

POTSDAM. — Astrophysikalische Observatorium : **Mitteilungen**.

WIEN. — Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse : *Sitzungsberichte*, S 358.

— Deutschen meteorologischen Gesellschaft. (Osterreichische Gesellschaft für Meteorologie) : *Meteorologische Zeitschrift*, Z 38.

Belgique.

BRUXELLES. — Académie royale de médecine de Belgique : *Bulletin*, B 899; *Mémoires*, M 440.

— Ministère de l'agriculture : *Bulletin du Jardin botanique de l'État*, B 1995.

— Musée royal d'histoire naturelle de Belgique : *Bulletin*, B 2016; *Mémoires*, M 576; *Mémoires* 2e *série*.

— Office central de statistique : *Bulletin de statistique*, B 2535A.

LIÉGE. — Société géologique de Belgique : *Bulletin*; *Mémoires*, M 534.

— Université. Institut de botanique : *Archives*, A 2116.

LOUVAIN. — Société scientifique de Bruxelles : *Annales*, A 1101.

TERVUEREN. — Musée du Congo belge : *Annales*, A 1083.

UCCLE. — Observatoire royal de Belgique : *Bulletin astronomique*, B 852A.

Danemark.

KOBENHAVN (COPENHAGUE). — Geodaetisk Institut : *Meddelelse*, G 219B.

— Kgl. Danske Videnskabernes-Selskabs (Académie royale des sciences et des lettres) : *Biologiske Skrifter*, S 372; *Biologiske Meddelelser*, K 58[1]; *Mathematisk-fysiske Meddelelser*, K 59; *Oversigt* (*Bulletin*), O 279.

— University. Zoological Museum : *The Danish Ingolf-Expedition*.

Espagne.

MADRID. — Consejo superior de investigaciones cientificas : *Trabajos del Instituto Cajal de investigaciones biologicas*.

— Observatorio astronomico : *Anuario*, A 1908; *Boletin astronomico*, B 419A.

SAN FERNANDO. — Instituto y Observatorio de Marina : *Almanaque nautico*, A 555.

Finlande.

HELSINGFORS. — Commission géodésique baltique : *L'activité de la Commission géodésique baltique pendant les années* 1938-1941; *Sonderveröffentlichung*.

— Finnische Akademie der Wissenschaften. Geophysikalische Observatorium : *Veroffentlichungen*.

— Societas geographica fenniæ : *Fennia*, F 32.

— Societas scientarium fennica (Finska Vetenskaps Societeten) : *Acta*, A 139; *Årsbok-Vuosikirja*, S 395[1]; *Bidrag till Kännedom af Finlands natur och Folk*, B 318; *Commentationes physico-mathematicae*, C 573 *bis*.

Helsingfors. — Suomalainen Tiedeakatemia (Academia Scientiarum fennica) : *F. F. Communications.*

— Suomen geologinen Toimikunta : *Bulletin de la Commission géologique de Finlande*, B 1093 *bis*.

— *Suomen geodeettisen laitoksen Julkaisuja*, S 751.

Hongrie.

Budapest. — Ungarische Akademie der Wissenschaften : *Mathematischer und natürwissenschaftlicher Anzeiger*, M 140.

Szeged. — Universitate : *Acta universitatis szegediensis* (*Acta scientiarum mathematicarum*).

Italie.

Citta del Vaticano. — Pontificia Academia scientiarum : *Acta*.

Roma. — Agenzia internazionale di Stampa : *Doc* (*édition française*).

— Ente nazionale per la Industrie turistiche : *Viaggio in Italia* (*Italia*).

— Institut international d'agriculture : *Revue internationale d'agriculture*, B 1902.

— Ministero dell' agricoltura e delle foreste : *Nuovi annali dell' agricoltura*, A 1131.

Monaco.

Monaco. — Institut océanographique : *Bulletin*, B 2015.

— Musée océanographique : *Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht par Albert Ier Prince souverain de Monaco*.

Norvège

Bergen. — Museum : *Arbok*, B 118 *bis*; *Årsberetning*, B 118 *bis*; *Skrifter*, B 119.

Oslo. — Norske videnskaps-akademi : *Arbok*, N 222[2]; *Astrophysica Norvegica*, A 2490[1A]; *Geofysiske Publikasjoner*, G 221 *bis*.

— Id. Matematisk-naturvidenskapelig Klasse : *Avhandlingar*, A 2642 *bis*[3]; *Skrifter* S 375.

— Norwegische meteorologische Institute : *Jahrbuch* N 214.

— Universitetsbiblioteket : *Norske Tidsskrifter*.

Pays-Bas.

Amsterdam. — Nederlansche Akademie van Wetenschappen ; *Proceedings; Proceedings of the Section of Sciences*, K 81; *Verslag van de gewone vergadering der afdeeling natuurkunde*, V 131.

'S Gravenhage. — Institut international de statistique : *Revue*, R 1124[B].

— Musée Teyler : *Archives*, A 2162.

Haarlem. — Société hollandaise des sciences : *Archives néerlandaises de phonétique expérimentale*, A 2184[A]; *Archives néerlandaises de physiologie de l'homme et des animaux*, A 2185.

— Société néerlandaise de zoologie : *Archives néerlandaises de zoologie*, A 2184[B].

Leiden. — Sterrewacht : *Annalen*, A 784.

Portugal.

COIMBRA. — Universidade. Observatorio astronomico : *Efemérides astronómicas,* E 303.
— *Noticias farmacéuticas,* N 259[A].

LISBOA. — Academia das ciências : *Anuario academico,* A 78[1A].

Roumanie.

BUCURESTI (BUCAREST). — Académie des sciences : *Comptes rendus des séances; Memorii si monografii.*
— Societatea romana de fizica : *Buletinul,* B 777[B].

CLUJ. — *Revista enciclopedica* (*Revista periodica lunara*).

TIMISOARA. — École polytechnique : *Bulletin scientifique* (*Comptes rendus des séances de la Société scientifique*), B 2479[1B]; *Teza prezentatà facultàtii... pentru obtinerea gradului de doctor-inginer.*

Suède.

GÖTEBORG. — Kungl-Vetenskaps-och Vitterhets-Samhälles : *Bihang,* B 330[A]; *Handlingar,* B 330[A].

STOCKHOLM. — K. Svenska Vetenskaps Akademiens : *Arkiv för Botanik,* B 331; *Arkiv för Kemi, Mineralogi och Geologi,* B 331; *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik,* B 331; *Arkiv för Zoologi,* B 331; *Årsbok,* K 67; *Handlingar,* S 775; *Levnadsteckningar,* L 59 *bis; Skrifter i naturskyddsärenden,* K 67[1].
— Observatorium : *Annalen* (*Astronomiska iakttagelser och undersökningar à Stockholms observatorium*), A 2490.
— *Acta Mathematica,* A 126.
— *Les Prix Nobel.* P 483.

UPPSALA. — Regiæ Societatis Scientiarum Uppsaliensi (Kungl. Vetenskaps-Societeten) : *Årsbok,* A 2324; *Nova acta,* A 125.
— Université. Anatomische Institut : *Läkareförenings Förhandlingar,* U 212.
— Id. Geological Institution : *Bulletin,* B 2364.
— Id. Observatoire météorologique : *Bulletin mensuel,* B 2318; *Observations séismographiques,* O 81.
— *Zoologiska Bidrag från Uppsala,* Z 218.

Suisse.

BÂLE. — Société de chimie helvétique : *Helvetica chimica acta,* H 52.

GENÈVE. — Ligue des Sociétés de la Croix-Rouge. *Renseignements scientifiques d'hygiène, médecine et biologie.*
— Société de physique et d'histoire naturelle : *Mémoires,* M 511.
— Sociétés de la Croix-Rouge : *Revue internationale de la Croix-Rouge* (*Bulletin international*), B 2200.

LAUSANNE. — Société helvétique des sciences naturelles : *Mémoires,* D 37.
— Société vaudoise des sciences naturelles : *Mémoires,* M 558[1].

NEUCHATEL. — Institut Guébhard-Severine : *Annales Guébhard-Severine,* A 868[3].

Tchécoslovaquie.

PRAHA (PRAGUE). — Pražské Hvězdorny : *Publikace.*

ASIE.

Chine.

CHANGSHA (HUNAN). — Geological Survey of China : *Paleontologia sinica*, P 16 *bis*.
SHANGHAÏ. — Science Institute : *Journal* (*Studies from the Department of Bacteriology of Geology; of Hygiene; of Physics*), J 851[A].

Japon.

NAGASAKI. — Universita Medica Nagasakiensis : **Acta Medica Nagasakiensis.**
OSAKA. — Imperial University. Faculty of Medecine : *Collected Papers*.
RYOJUN. — College of Engineering : *Memoirs*, M 641[1].
SENDAI. — Saito Gratitude Foundation (Saito-Ho-On-Kai) : *Annual Report of the Work*, A 1814[1].
— Tôhoku Imperial University : *Science Reports*, S 215 *bis*.
— Id. Institut mathématique : *Tôhoku Mathematical Journal*, T 180.
TOKYO. — Agricultural Chemical Society of Japan : *Journal*, J 779[B].
— Chemical Society of Japan : *Bulletin*, B 2355[1]
— Imperial Academy : *Proceedings*, P 554[1].
— Imperial University. Aeronautical Research Institute : *Report*, R 425[1].
— Id. Astronomical Observatory : *Astronomical Bulletin*, T 181[1].
— Id. Government Institute for Infectious Diseases : *Japanese Journal of Experimental Medicine*, J 245[ter 1 A].
— Institute of Physical and Chemical Research : *Bulletin*, B 2377[1]; *Scientific Papers*, S 229.
— Japan Institute for Science of Labour : *Annual Report of the director*.
— National Research Council of Japan : *Japanese Journal of Astronomy and Geophysics*, J 245; *Japanese Journal of Botany*, J 245 *bis*; *Japanese Journal of Mathematics*, J 245[ter 3]; *Japanese Journal of Medical Sciences*, J 245 *quater*.
— Physico-mathematical Society of Japan : *Proceedings*, T 184.

Manchoukuo.

HSINCHING. — Institute of Scientific Research Manchoukuo : *Report*, R 472[A].

AFRIQUE.

Afrique Occidentale française.

DAKAR. — Institut français d'Afrique Noire : Bulletin; **Mémoires**.

Algérie.

ALGER. — Institut Pasteur d'Algérie : *Archives*, A 2116[2].

Madagascar.

TANANARIVE. — Académie Malgache : *Bulletin; Mémoires*, M 450[1].

Maroc.

RABAT. — Institut Scientifique chérifien. Service de physique du globe et de météorologie : *Annales*.
— Société des sciences naturelles du Maroc : *Bulletin*, B 1576[1].

Tunisie.

TUNIS. — Direction des affaires économiques. Service botanique et agronomique : *Annales*.

AMERIQUE

Argentine.

BUENOS-AIRES. — Instituto de medicina experimental para el estudio y tratamiento del Cancer : *Boletin*; [*Publications*].

États-Unis.

ANN ARBOR. — University of Michigan. Observatory : *Publications*, D 149.
CHICAGO. — American Medical Association : *Archives of Dermatology and Syphilology*, J 730.
COLUMBIA. — Missouri Academy of Science : *Proceedings*.
COLUMBUS. — Ohio State University : (*Studies*). Biological Survey : *Bulletin*, O 152 *bis*[1].
GOLDEN. — Colorado School of Mines : *Quarterly*, Q 14[1].
WASHINGTON. — Department of Commerce. Bureau of Standards : *Handbook*, U 82[B].
— National Academy of Sciences : *Biographical Memoirs*, N 16; *Memoirs*, M 631.
— National Research Council : *Organization and Members*, N 27[A]; *Report*, A 1762[2].
— Smithsonian Institution. National Museum : *Proceedings*, P 612.